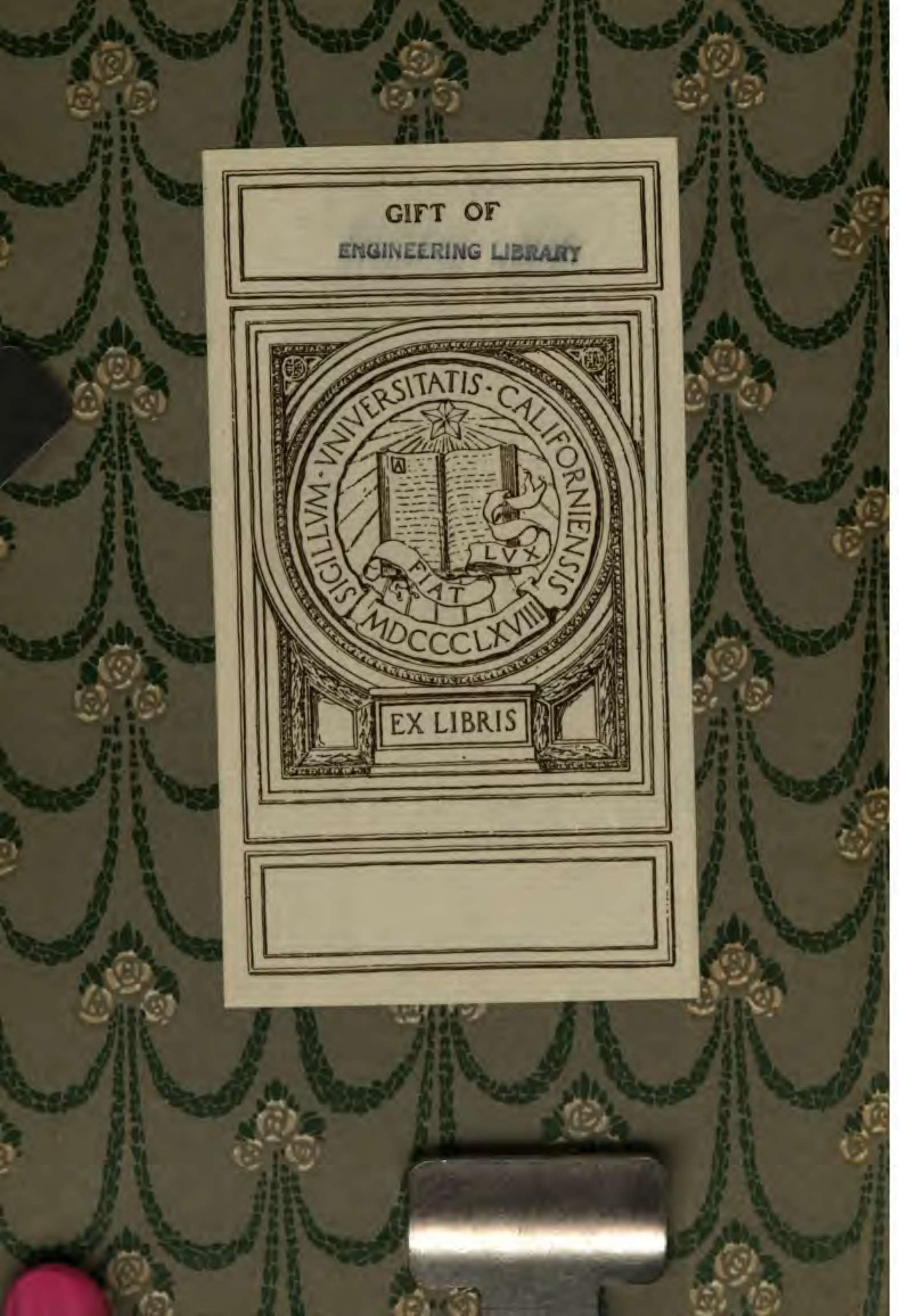
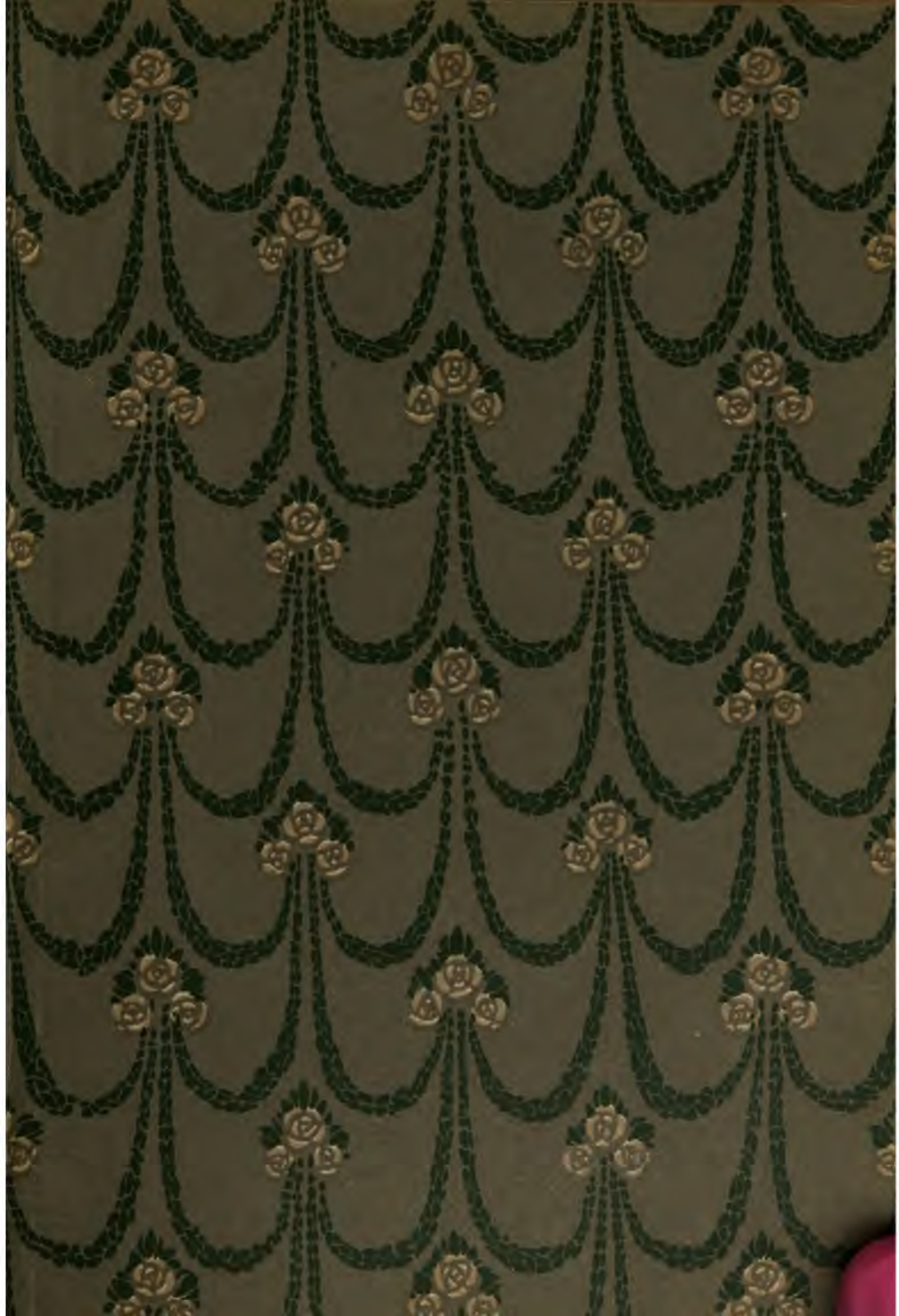

UC-NRLF
$B 33 126



GIFT OF
ENGINEERING LIBRARY
SIGILLVM · VNIVERSITATIS · CALIFORNIENSIS
FIAT LVX
MDCCCLXVIII
EX LIBRIS





Über eine Methode zur Behandlung unsymmetrischer Kabelsysteme

unter Berücksichtigung des konzentrischen mit Bleimantel umpreßten Zwei-Leiter-Kabels als Beispiel.

Dissertation

zur Erlangung

der Würde eines Doktor-Ingenieurs

von der

Königlich Technischen Hochschule in Danzig

genehmigt

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Arthur Geldermann

aus Aachen.

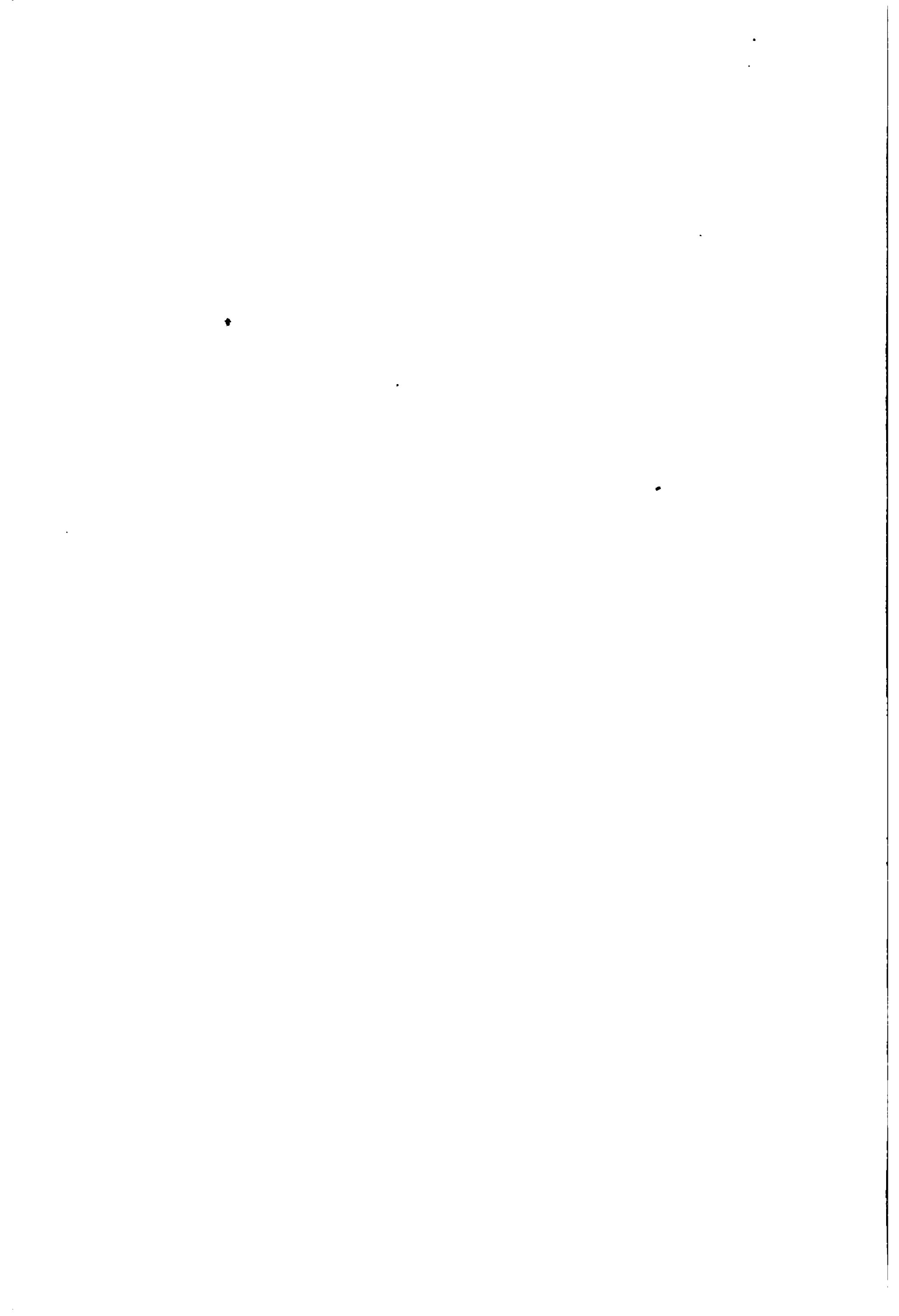
Referent: Professor Dr. Roessler.

Korreferent: Privatdozent Dr. Simons.

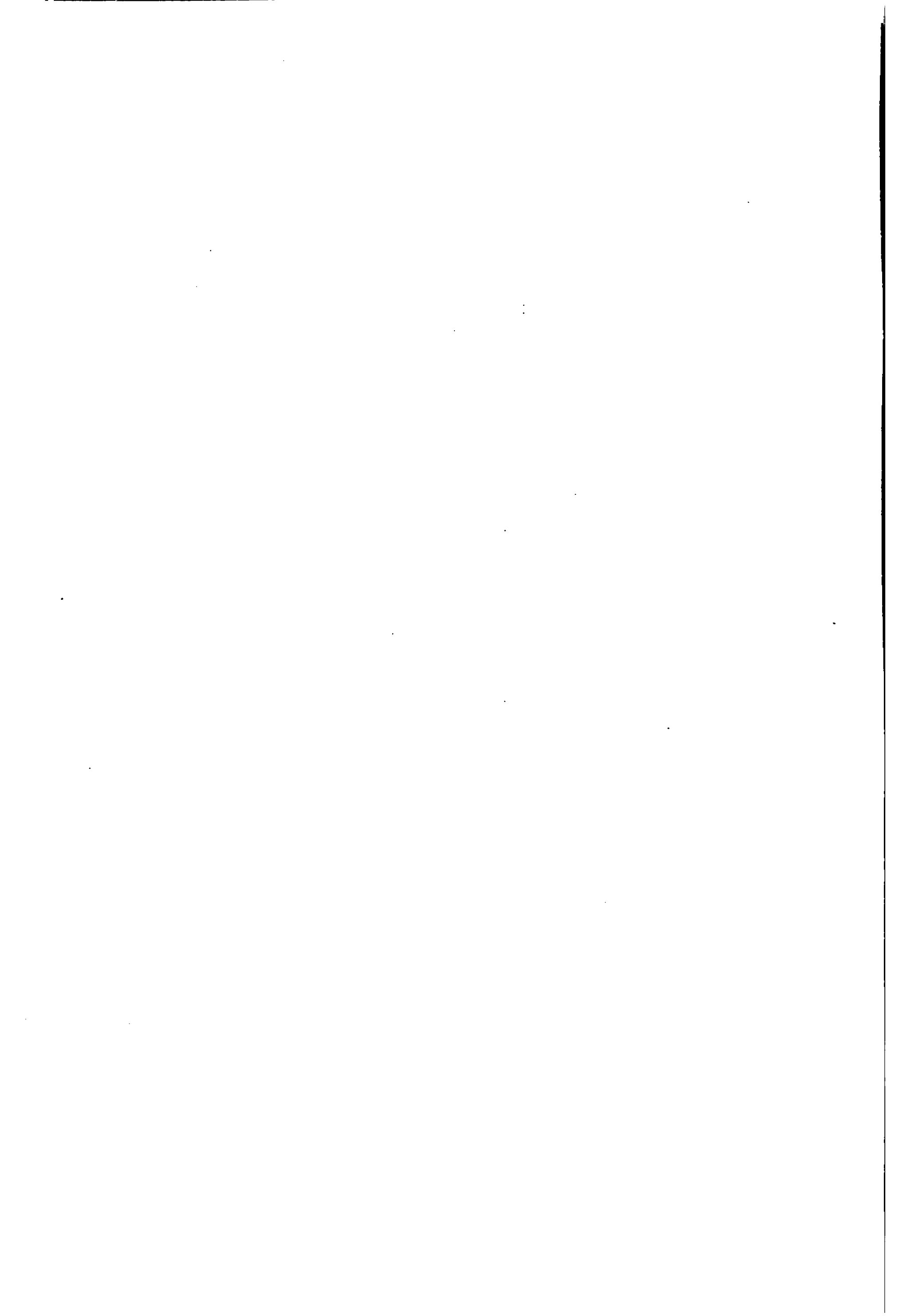
Danzig 1906

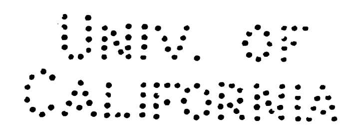
Druck von Schwital & Rohrbeck, Hopfengasse 21

Vorliegende Arbeit entstand auf Anregung des Vorstehers des elektrotechnischen Instituts der Kgl. Technischen Hochschule zu Danzig, Herrn Professor Dr. Roessler, welchem ich mich verpflichtet fühle, auch an dieser Stelle meinen aufrichtigsten Dank für seine wertvollen Ratschläge auszusprechen.



Inhaltsverzeichnis.





I. Allgemeines über Unsymmetrien, die unter Zugrundelegung zweier gekuppelter Stromkreise zu behandeln sind.

Unter gewissen Betriebsverhältnissen bestehen in der Lage der Leitungen zu einander Unsymmetrien, die für das Studium der Fernleitung von Wechselströmen erschwerend in Betracht kommen. Dieser Fall tritt — allgemein ausgedrückt — immer dann auf, wenn die Betrachtung einer Art Stromkreise für sich allein nicht mehr zulässig ist, oder — bei Drehstrom — infolge des Umstandes, daß alle Leitungen nicht mehr in gleicher Weise einander gegenüberstehen, die einzelnen Leiter verschieden beeinflußt werden. Die erstere Bedingung ist z. B. bei dem mit Bleimantel umpreßten konzentrischen Zwei-Leiter-Kabel gegeben. Sind beide Leitungen offen an eine Stromquelle angeschlossen, so haben Innenleiter, Außenleiter und Bleimantel verschiedene Ladungen, da nicht nur deshalb Elektrizität auf beiden Leitern (die das Potential Ep_1 und Ep_2 haben mögen) angehäuft wird, weil sie Kapazität gegeneinander haben, sondern auf dem Außenleiter außerdem noch, weil er Kapazität gegen den Bleimantel hat. Die elektrischen Massen auf dem Außenleiter rufen sowohl auf dem Innenleiter wie auf dem Bleimantel elektrische Massen entgegengesetzten Zeichens hervor. Bei dem Innen-

leiter liegt aber der Fall anders, er ist vom Außenleiter ganz umschlossen und hat mithin nur Kapazität gegen diesen, nicht aber gegen den Bleimantel.

Die auf dem Außenleiter aufgehäufte Elektrizität ist also entgegengesetzt gleich der Summe der auf dem Innenleiter und Bleimantel aufgehäuften. Es ist mithin unter Voraussetzung einer Wechselstromquelle durch Innenleiter und Außenleiter ein Stromkreis gebildet, in dem der Strom dJ_1 fließt (dem Innenleiter möge der Index 1 zukommen, dem Bleimantel der Index 3) und ein zweiter Stromkreis durch Außenleiter und Bleimantel, in dem dJ_3 fließt, wobei der Außenleiter die gemeinsame Rückleitung beider Ströme übernimmt. Da wir uns das Kabel als aus unendlich kleinen Kondensatoren bestehend, vorstellen können, in denen die Ströme dJ_1 und dJ_3 abfließen, so sind die Größen J_1 und J_3 natürlich Funktionen der Länge und liegen dementsprechend je 2 Arten unendlich vieler Stromkreise vor, im Gegensatze zu dem einfachen Fall, bei dem nur zwischen Hin- und Rückleitung Kapazität vorhanden ist und mithin nur e i n e Art Stromkreise vorliegt.

Die oben angestellten Betrachtungen für das mit Bleimantel umpreßte Zwei-Leiter-Kabel gelten auch für das dreifach konzentrische Kabel unter Vernachlässigung der Kapazität des Außenleiters gegen den Bleimantel, und es wäre daher unter dieser Bedingung analog dem ersten zu behandeln.

Auch bei 3 unsymmetrisch gelegenen Drehstromoberleitungen, die genügend weit über der Erde sich befänden, sodaß eine Vernachlässigung der Kapazität der Leiter gegen Erde stattfinden dürfte, ließe sich von 2 Arten gekuppelter Stromkreise sprechen, da die Summe der 3 Ströme gleich Null ist und der eine

Leiter als der Rückleiter der Ströme der beiden andern Leiter betrachtet werden kann.

Die Lösungen der allgemein für 2 Arten gekuppelter Stromkreise aufzustellenden Gleichungen lassen sich also unter Berücksichtigung der jeweiligen elektrischen Daten auf die verschiedenen genannten Fälle spezialisieren.

II. Aufstellung der Strom- und Spannungsgleichungen für den unter I genannten allgemeinen Fall.

Was die Aufstellung der Stromgleichungen mit Hilfe der komplexen Methode betrifft, so lassen sich die in Roessler, Fernleitung von Wechselströmen S. 50, 51 gemachten Überlegungen mit dem Unterschiede übernehmen, daß hier Kapazität je eines Leiters gegen die beiden andern vorhanden ist. Es mögen im Folgenden die Bezeichnungen an diejenigen genannten Buches anlehnen und zu den Unterscheidungen Indices verwandt werden, sodaß z. B. die Spannungsdifferenz für einen Punkt, dessen Abstand vom Kabelende $= x$ zwischen Leiter 1 und 3 durch $Ep_{1,3,x}$ bezeichnet werde, entsprechendes gilt für die Kapazitäten und Leitfähigkeiten.

Somit lauten die Stromgleichungen für Leiter 1 und Leiter 3:

$$dJ_1 = (g_{1,2} + i\omega c_{1,2}) Ep_{1,2,x} dx + (g_{1,3} + i\omega c_{1,3}) Ep_{1,3,x} dx$$

$$dJ_3 = (g_{3,2} + i\omega c_{3,2}) Ep_{3,2,x} dx + (g_{3,1} + i\omega c_{3,1}) Ep_{3,1,x} dx$$

Aus denselben lassen sich mit Berücksichtigung der Beziehung:

$$Ep_{1,x} - Ep_{3,x} = Ep_{1,x} - Ep_{2,x} + Ep_{2,x} - Ep_{3,x} \text{ oder}$$

$$Ep_{1,3,x} = Ep_{1,2,x} + Ep_{2,3,x} \text{ und } Ep_{1,2,x} = - Ep_{2,1,x} \text{ etc.}$$

$Ep_{1,3,x}$ und $Ep_{3,1,x}$ eliminieren und die Gleichungen auf die allgemeine Form bringen:

$$dJ_1 = H\,Ep_{1,2,x}dx + H'\,Ep_{3,2,x}dx$$
$$dJ_3 = K\,Ep_{3,2,x}dx + K'\,Ep_{1,2,x}\,dx$$

Die Worte H, H', K, K' sind nur abhängig von Kapazität, Leitfähigkeit und Periodenzahl und können mithin nach Feststellung dieser Kabeldaten für jeden speziellen Fall ausgedrückt werden.

Um die Spannungsgleichungen aufstellen zu können, haben wir den unendlich kleinen Spannungsfall $dEp_{1,2}$ und $dEp_{3,2}$ zu bestimmen. Betrachten wir gemäß nebenstehender Figur

1. J_1 dx
2. $(J_1 + J_3)$
3. J_3

ein unendlich kleines Stück dx der Leitung 1 und 2, worin der unendlich kleine Spannungsabfall $dEp_{1,2}$ auftritt. Der Ohm'sche Spannungsabfall desselben ist:

$$J_{1,x}w_1dx + (J_{1,x} + J_{3,x})w_2dx$$
oder $$J_{1,x}(w_1 + w_2)dx + J_{3,x}w_2dx$$
und entsprechend für $dEp_{3,2}$:
$$J_{3,x}(w_3 + w_2)dx + J_{1,x}w_2dx$$

Zur Bestimmung des induktiven Spannungsabfalles erinnern wir uns daran, daß beim Vorhandensein zweier Stromkreise die magnetische Energie W_m die Form annimmt:

$$W_m = \frac{L}{2}\mathit{J}_1^2 + M\,\mathit{J}_1\,\mathit{J}_3 + \frac{N}{2}\mathit{J}_3^2\text{*)}$$

worin L und N die Selbstinduktionskoeffizienten der Ströme J_1 und J_3 bedeuten und M der Koeffizient der gegenseitigen Induktion ist.

Zur Bestimmung der Formeln, nach denen L, M

*) Die nicht komplexen Größen sind in vorliegender Arbeit durch Kursivschrift bezeichnet.

und N aus den Kabeldimensonen berechnet werden können, werden wir später die Ableitung der Formel für die magnetische Energie aus den Kabeldimensionen geben.

Drücken wir mit Hilfe der Koeffizienten L, M und N die induktiven Spannungsabfälle aus, so ergibt sich für $dEp_{1,2}$

$i\omega L J_{1,x} dx + i\omega M J_{3,x} dx$ und für $dEp_{3,2}$

$i\omega N J_{3,x} dx + i\omega M J_{1,x} dx$

Addieren wir die zusammengehörenden Ohm'schen und induktiven Spannungsabfälle, so lauten die Spannungsgleichungen:

$$dEp_{1,2} = J_{1,x}(w_1 + w_2 + i\omega L)\,dx + J_{3,x}(w_2 + i\omega M)\,dx;$$
$$dEp_{3.2} = J_{3,x}(w_3 + w_2 + i\omega N)\,dx + J_{1,x}(w_2 + i\omega M)\,dx.$$

III. Lösung der Strom- und Spannungsgleichungen.

Die für zwei gekuppelte Stromkreise sich ergebenden Spannungs- und Stromgleichungen haben nach vorhergehendem die allgemeine Form:

$$1.\ \frac{dEp_{1,2}}{dx} = J_{1,x}D + J_{3,x}F; \qquad 3.\ \frac{dJ_1}{dx} = Ep_{1,2}H + Ep_{3,2}H';$$

$$2.\ \frac{dEp_{2,3}}{dx} = J_{3,x}G + J_{1,x}F; \qquad 4.\ \frac{dJ_3}{dx} = Ep_{3,2}K + Ep_{1,2}K';$$

Durch Differentiation der Gleichungen 3 und 4 und Ersetzen der entstandenen Ausdrücke $\frac{dEp_{1,2}}{dx}$ und $\frac{dEp_{3,2}}{dx}$ durch die rechten Seiten der Gleichungen 1 und 2 erhalten wir:

$$3'.\ \frac{d^2J_1}{dx^2} = H(J_{1,x}D + J_{3,x}F) + H'(J_{3,x}G + J_{1,x}F)$$

$$4'.\ \frac{d^2J_3}{dx^2} = K(J_{3,x}G + J_{1,x}F) + K'(J_{1,x}D + J_{3,x}F)$$

aus 3'. ergibt sich:

$$3''.\quad J_{3,x} = \frac{1}{HF + H'G.}\left\{\frac{d^2J_1}{dx^2} - J_{1.x}(HD + H'F)\right\};$$

und zweimal differentiiert:

$$\frac{d^2J_3}{dx^2} = \frac{1}{HF + H'G}\left\{\frac{d^4J_1}{dx^4} - \frac{d^2J_1}{dx^2}(HD + H'F)\right\};$$

Durch Einsetzen dieser Werte für $J_{3,x}$ und $\frac{d^2J^3}{dx^2}$ in 4' ergibt sich:

$$4''.\quad \frac{d^4J_1}{dx^4} + (-KG - K'F - HD - H'F)\frac{d^2J_1}{dx^2} + \\ + \{(HD + H'F)(KG + K'F) - \\ (HF + H'G)(KF + K'D)\}J_1 = 0;$$

Die Faktoren bei $\frac{d^2J_1}{dx^2}$ bezw. bei J_1 mögen mit α bezw. β bezeichnet werden, so daß die Gleichung folgende übersichtlichere Form annimmt:

$$\frac{d^4J_1}{dx^4} + \alpha\frac{d^2J_1}{dx^2} + \beta J_1 = 0;$$

Da α und β konstante Grössen sind, so liegt also der einfache Fall einer homogenen, linearen Differentialgleichung mit konstanten Faktoren vor. Das allgemeine Integral derselben lautet:

$$J_{1,x} = C_1e^{v_1x} + C_2e^{v_2x} + C_3e^{v_3x} + C_4e^{v_4x}$$

wobei v_1, v_2, v_3, v_4, lauter konstante Wurzeln der Gleichung darstellen:

$$F(v) = v^4 + \alpha v^2 + \beta = 0$$

also

$$v_{1,2,3,4,} = \pm\sqrt{-\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \beta}}$$

mithin

$$v_1 = -v_2\ ;\ v_3 = -v_4$$

$$\text{I.}\quad J_{1,x} = C_1e^{v_1x} + C_2e^{-v_1x} + C_3e^{v_3x} + C_4e^{-v_3x}$$

Mit Hilfe des berechneten $J^{1,x}$ ergibt sich aus Gleichung 3'' auf Seite 7

$$\text{II. } J_{3,x} = \frac{1}{HF + H'G}\left\{(v_1^2 - HD - H'F)(C_1 e^{v_1 x} + C_2 e^{-v_1 x}) + (v_3^2 - HD - H'F)(C_3 e^{v_3 x} + C_4 e^{-v_3 x})\right\}$$

aus Gleichung 3 und 4 auf derselben Seite:

$$\text{III. } Ep_{1,2,x} = v_1\left(\frac{K}{HK + H'K'} + \frac{H'(v_1^2 - HD - H'F)}{(HK + H'K')(HF + H'G)}\right)(C_1 e^{v_1 x} - C_2 e^{-v_1 x}) + + v_3\left(\frac{K}{HK + H'K'} + \frac{H'(v_3^2 - HD - H'F)}{(HK + H'K')(HF + H'G)}\right)(C_3 e^{v_3 x} - C_4 e^{-v_3 x})$$

$$\text{IV. } Ep_{3,2,x} = v_1\left(\frac{K'}{HK + H'K'} + \frac{H(v_1^2 - HD - H'F)}{(HK + H'K')(HF + H'G)}\right)(C_1 e^{v_1 x} - C_2 e^{-v_1 x}) + \left(+ v_3\frac{K'}{HK + H'K'} + \frac{H(v_3^2 - HD - H'F)}{(HK + H'K')(HF + H'G)}\right)(C_3 e^{v_3 x} - C_4 e^{-v_3 x}).$$

Die letzten 4 Gleichungen setzen uns in den Stand, alle die Fälle zu behandeln, bei denen 3 Leitungen unter gleich welchen relativen Lagen zu einander, vorhanden sind und die Summe ihrer 3 Ströme gleich Null gesetzt werden kann.

Selbstverständlich kann man aus den bisherigen Betrachtungen auch die Gleichungen für den einfachen Fall einer Hin- und Rückleitung finden, indem die für diesen Fall zu Null werdenden elektrischen Daten mit diesem Wert ausgedrückt werden.

Es ergeben sich dann dieselben Gleichungen, die schon in Roessler, Fernleitung von Wechselströmen S. 55 für diesen einfachen Fall aufgestellt wurden.

IV. Überführung der allgemeinen Gleichungen auf den speziellen Fall, des mit Bleimantel umpreßten, konzentrischen Zwei-Leiter-Kabels.

Es möge nun, nachdem wir die Gleichungen für den allgemeinen Fall abgeleitet haben, der spezielle Fall des schon eingehend erwähnten, mit Bleimantel umpreßten konzentrischen Zwei-Leiter-Kabels ins Auge gefaßt werden. Wie schon auf S. 2 ausgeführt, fließt vom Innenleiter zum Bleimantel oder umgekehrt kein Kondensatorstrom ab, ebensowenig ein Isolationsstrom. Die Werte H' und K' werden mithin zu Null, so daß die Gleichungen I, II, III, IV auf S. 6, 7 für den jetzt betrachteten Fall folgende Form annehmen:

I'. $J_{1,x} = C_1 e^{v_1 x} + C_2 e^{-v_1 x} + C_3 e^{v_3 x} + C_4 e^{-v_3 x};$

II'. $J_{3,x} = \frac{1}{HF} \{ (v_1^2 - HD)(C_1 e^{v_1 x} + C_2 e^{-v_1 x})$
$+ (v_3^2 - HD)(C_3 e^{v_3 x} + C_4 e^{-v_3 x}) \};$

III'. $Ep_{1,2,x} = \frac{1}{H} \{ v_1 (C_1 e^{v_1 x} - C_2 e^{-v_1 x})$
$+ v_3 (C_3 e^{v_3 x} - C_4 e^{-v_3 x}) \};$

IV'. $Ep_{3,2,x} = \frac{1}{HKF} \{ v_1 (v_1^2 - HD)(C_1 e^{v_1 x} - C_2 e^{-v_1 x})$
$+ v_3 (v_3^2 - HD)(C_3 e^{v_3 x} - C_4 e^{-v_3 x}) \}.$

Es handelt sich nun darum, die jeweils von der Natur des Problems abhängenden 4 Konstanten zu bestimmen.

V. Berechnung der Konstanten für das am Ende offene Kabel bei gegebenem elektrischen Zustande am Kabelanfang.

Wir betrachten zu diesem Zwecke zunächst das offene Kabel von der Länge *l*, wobei es einstweilen noch unberücksichtigt bleibe, ob *l* unendlich oder

endlich ist. Der elektrische Zustand an der Zentrale sei gegeben, mithin sind uns die Werte $Ep_{1,2,l}$ und $Ep_{3,2,l}$ bekannt, unter der schon bei Aufstellung der Gleichungen erwähnten Voraussetzung, daß x immer von dem Kabelende gezählt wird, daß vom Generator fern liegt; dementsprechend ist $x = 0$ Bezeichnung für das Kabelende, oder was dasselbe ist, für die Konsumstelle. An dieser Stelle ist

$$J_{1,0} = 0 \text{ und } J_{3,0} = 0,$$

da wir ein offenes Kabel betrachten.

Zur Berechnung der Konstanten erhalten wir also jetzt folgende Bestimmungsgleichungen; wobei wir zur Vereinfachung die obigen Gleichungen III' und IV' (S. 8) mit dem Nenner multiplizieren und dann

$$HEp_{1,2,l} = A; \quad FHKEp_{3,2,l} = B$$

setzen:

I''. $C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0;$

II''. $(v_1^2 - HD)\,C_1 + (v_1^2 - HD)\,C_2 + (v_3^2 - HD)\,C_3 + (v_3^2 - HD)\,C_4 = 0;$

III''. $v_1 e^{v_1 l} C_1 + (-v_1 e^{-v_1 l})\,C_2 + v_3 e^{v_3 l} C_3 + (-v_3 e^{-v_3 l})\,C_4 = A;$

IV''. $(v_1^2 - HD)\,v_1 e^{v_1 l} C_1 + (v_1^2 - HD)(-v_1 e^{-v_1 l})\,C_2 + (v_3^2 - HD)\,v_3 e^{v_3 l} C_3 + (v_3^2 - HD)(-v_3 e^{-v_3 l})\,C_4 = B.$

Mit Hilfe der Determinanten ergibt sich:

$$C_1 = -C_2 = \frac{A(v_3^2 - HD) - B}{v_1 (v_3^2 - v_1^2)(e^{v_1 l} + e^{-v_1 l})};$$

$$C_3 = -C_4 = \frac{A(v_1^2 - HD) - B}{v_3 (v_1^2 - v_3^2)(e^{v_3 l} + e^{-v_3 l})};$$

Die Richtigkeit von C_1, C_2, C_3 und C_4 wurde durch Einsetzen in obige 4 Gleichungen festgestellt. Für die zahlenmäßige Berechnung der Konstanten möge noch bemerkt werden, daß es empfehlenswert ist,

zuerst $v_1 C_1$ und $v_3 C_3$ zu berechnen und aus diesen die für die Stromgleichungen nötigen C_1 und C_3 zu finden, und zwar aus dem Grunde, weil die Werte $v_1 C_1$ und $v_3 C_3$ in dieser Form in den Spannungsgleichungen auftreten und im Nenner von C_1 bezw. C_3, v_1 bezw. v_3 vorkommen, so daß die Berechnung von $v_1 C_1$ und $v_3 C_3$ eine rechnerische Operation weniger verlangt als C_1 und C_3 und mithin auch die zahlenmäßige Genauigkeit der ersteren Werte und somit auch der Spannungsgleichungen größer wird. Es ist dies von Vorteil, da infolge der vielen notwendigen Operationen mit komplexen Größen die Genauigkeit abnimmt. Eine Kontrolle über die Größe derselben liegt in der Einsetzung der errechneten Zahlenwerte in die Bestimmungsgleichungen III'' und IV'' S. 9. Es ließe sich dann auf verschiedene Weise eine größere Genauigkeit erstreben, z. B. durch folgende Überlegung. Schreiben wir Gleichung III' S. 8 für $x = l$ in folgender Form: $Ep_{1,2,l} = \mathfrak{A} C_1 + \mathfrak{B} C_3$ so ist, da $Ep_{1,2,l}$ eine reelle Zahl ist, wenn die Spannung am Kabelanfang ($x = l$) als Ausgang der Phasenzählung gewählt wird, $\mathfrak{A} C_1 + \mathfrak{B} C_3$ auch eine reelle Zahl.

Setzen wir

$$\mathfrak{A} C_1 = p_1 + iq_1; \quad \mathfrak{B} C_3 = p_3 + iq_3$$

so ist erforderlich:

$$q_1 = -q_3$$

Man wird die bei genauen Berechnungen auftretenden geringfügigen Abweichungen durch entsprechende Korrektur von C_1 und C_3 verringern können.

Es ließe sich auch, nachdem C_1 und C_3 einmal gemäß ihrer Formeln auf S. 9 berechnet wurden, durch jeweiliges Einsetzen nur eines dieser Werte in

Gleichung III und IV der andere finden und wären die Mittelwerte als korrigierte Werte zu benutzen. — Die größtmögliche Genauigkeit der Konstantenwerte ist natürlich von besonderer Wichtigkeit.

VI. Deutung der Gleichungen.

Nachdem wir auf S. 9 gefunden, daß $C_1 = - C_2$ und $C_3 = - C_4$ wird, wollen wir die allgemeine Form der Gleichungen (siehe S. 8) so modifizieren, daß in ihnen nur noch C_1 und C_3 vorkommt, mithin:

$$\text{I'''.}\quad J_{1,x} = C_1 (e^{v_1 x} - e^{-v_1 x}) + C_3 (e^{v_3 x} - e^{-v_3 x});$$

$$\text{II'''.}\quad J_{3,x} = \frac{1}{HF} \{ (v_1^2 - HD) C_1 (e^{v_1 x} - e^{-v_1 x}) + (v_3^2 - HD) C_3 (e^{v_3 x} - e^{-v_3 x}) \};$$

$$\text{III'''.}\quad Ep_{1,2,x} = \frac{1}{H} \{ v_1 C_1 (e^{v_1 x} + e^{-v_1 x}) + v_3 C_3 (e^{v_3 x} + e^{-v_3 x}) \};$$

$$\text{IV'''.}\quad Ep_{3,2,x} = \frac{1}{FHK} \{ v_1 C_1 (v_1^2 - HD)(e^{v_1 x} + e^{-v_1 x}) + v_3 C_3 (v_3^3 - HD)(e^{v_3 x} + e^{-v_3 x}) \}$$

Zur Deutung der so auf die einfachste Form gebrachten vier Gleichungen wollen wir den Fall eines Stromkreises zum Vergleich heranziehen, für diesen lauten die Gleichungen in Roessler, Fernleitung von Wechselströmen S. 107 unter Voraussetzung der Zählung von x vom Kabelende aus, also identisch mit der benutzten Zählerweise:

$$1.\quad Ep_x = \frac{Ep_{o,max}}{2} (e^{vx} + e^{-vx})$$

$$2.\quad J_x = \frac{v}{R} \frac{Ep_{o,max}}{2} (e^{vx} - e^{-vx})$$

Diese Gleichungen setzen freilich die Spannung an der Konsumstelle $Ep_{o,max}$ als gegeben voraus,

während bei der Aufstellung unserer Gleichungen von der Spannung an der Zentrale ausgegangen wurde. Man sieht jedoch sofort, daß dies nur eine Veränderung des Nenners der Konstanten bedeutet, da für gegebene Spannung an der Konsumstelle, also für $l = o$, der Klammerausdruck

$$e^{v_1 l} + e^{-v_1 l} = 2 \text{ und } e^{v_3 l} + e^{-v_3 l} = 2 \text{ wird.}$$

Für die nachfolgenden Erwägungen kommt diese Konstantenänderung nicht in Betracht.

Die eben genannten Gleichungen 1 und 2 stellen Ep_x und J_x mathematisch aus 2 Summanden dar, von denen der eine, eine vom Generator in das Kabel einlaufende und der andere die vom Kabelende reflektierte Welle darstellt (Roessler, S. 108).

In unserem Falle bestehen $Ep_{1,2,x}$, $Ep_{3,2,x}$ und $J_{1,x}$, $J_{3,x}$ aus je 4 solcher, je eine Welle darstellender Summanden und zwar, wie aus ihren Gleichungen ersichtlich, aus je zwei in das Kabelende einlaufenden und je zwei dazugehörigen nach dem Kabelanfang immer stärker gedämpft, zurückfließenden Wellen.

Der Grund, warum es sich hier um je zwei Wellen handelt, liegt darin, daß hier auch zwei Stromkreise anstatt eines in Betracht kommen.

Wie wir bei Betrachtung unserer vier Gleichungen sehen, subtrahieren sich bei der Interferenz je zwei zusammengehörige Stromwellen und addieren sich ebensolche Spannungswellen; es mußte dies auch der Fall sein, da die in vorher angeführtem Buch auf S. 109 angestellten Betrachtungen über Subtraktion bezw. Addition der Strom- bezw. Spannungswellen ganz allgemeiner Natur sind.

Wir erkennen weiterhin zwischen den vier Gleichungen eine nähere Verwandtschaft, denn abgesehen von den der ganzen rechten Seite der

Gleichungen II''' und IV''' zukommenden Brüchen $\frac{1}{HF}$ bezw. $\frac{1}{FK}$ entsteht $J_{3,x}$ aus $J_{1,x}$ und $Ep_{3,2,x}$ aus $Ep_{1,2,x}$, indem in dem Ausdruck für $J_{1,x}$ und $Ep_{1,2,x}$ die beiden Paare Summanden, die je 2 zusammengehörige Wellen darstellen, mit gleichen Faktoren $(v_1^2 - HD)$ bezw. $(v_3^2 - HD)$ multipliziert werden. Die Gesetzmäßigkeit, nach der sich die Gleichungen ändern, ist natürlich eine verschiedene, sowohl infolge des Umstandes, daß die beiden Faktoren mit denen je zwei Summanden derselben Gleichung multipliziert werden, von einander verschieden sind, als auch infolge der Verschiedenheit der genannten Brüche.

Es wird hierauf noch bei zahlenmäßiger Behandlung eines Beispiels zurückzukommen sein.

Für spätere Kontrollrechnung ist es auch von Interesse die Gleichungen II''' und IV''' in einer etwas andern Form: und zwar in folgender zu betrachten:

$$J_{3,x} = \frac{1}{F}\left\{\frac{1}{H}\left[v_1^2 C_1 (e^{v_1 x} - e^{-v_1 x}) + v_3^2 C_3 (e^{v_3 x} - e^{-v_3 x})\right] - D J_{1,x}\right\};$$

$$Ep_{3,2,x} = \frac{1}{KF}\left\{\frac{1}{H}\left[v_1^3 C_1 (e^{v_1 x} + e^{-v_1 x}) + v_3^2 C_3 (e^{v_3 x} + e^{-v_3 x})\right] - HD Ep_{1,2,x}\right\}.$$

Ihre Art der Entstehung ist ohne weiteres aus Gleichung I bezw. IV S. 6, 7 zu erkennen.

Die S. 13 gegebenen entsprechenden Gleichungen können auch aus diesen durch Eliminieren von $J_{1,x}$ und $Ep_{1,2,x}$ entstanden gedacht werden. Zur Berechnung eignen sich die früheren Gleichungen besser, da

die Werte v_1^2, v_3^2 und HD schon vorher aufgestellt werden mußten und eine Division komplexer Größen weniger auftritt.

VII. Betrachtung der Gleichungen bei gegebenem elektrischen Zustand am Kabelende.

Wir waren bei Aufstellung der Formeln für die Konstanten vom elektrischen Zustand am Kabelanfang ausgegangen, um denjenigen am Kabelende festzustellen.

Aus den S. 106, 107, Roessler, Fernleitung für den einfachen Fall gegebenen Gleichungen und ihren Konstanten sieht man sofort, daß es für diesen Fall genügt, beispielsweise für den am Kabelanfang gegebenen elektrischen Zustand denjenigen am Kabelende berechnet zu haben (oder umgekehrt) um dann durch einfache Proportionalität, ohne Zuhilfenahme neuer Gleichungen auch den elektrischen Zustand am Kabelanfang zu finden, wenn er am Kabelende gegeben ist.

Anders jedoch liegt der Fall in unserm Beispiel. Infolge des Auftretens von 2 Spannungen $Ep_{1,2}$ und $Ep_{3,2}$ gilt nur dann das eben Gesagte, wenn das Verhältnis $Ep_{3,2,l} : Ep_{1,2,l}$ in beiden Fällen das gleiche ist; das würde aber natürlich, da hierdurch schon eine Bedingung gegeben ist, nur noch eine Spannung am Kabelende als vorgeschrieben voraussetzen.

Die Richtigkeit dieser Beziehung ergibt sich sofort bei Betrachtung der Gleichung III''' S. 11, nachdem wir ihr die Konstanten eingesetzt haben:

$$Ep_{1,2,x} = \frac{1}{H} \left\{ v_1 \frac{HEp_{1,2,l}(v_3^2 - HD) - FHK\,Ep_{3,2,l}}{v_1(v_3^2 - v_1^2)(e^{v_1 l} + e^{-v_1 l})} \right.$$

$$(e^{v_1 x} + e^{-v_1 x}) + v_3 \frac{H\,Ep_{1,2,l}(v_3^2 - HD) - FHK\,Ep_{3,2,l}}{v_3(v_1^2 - v_3^2)(e^{v_3 l} + e^{-v_3 l})} (e^{v_3 x} + e^{-v_3 x}), \Big\}$$

Ziehen wir den Faktor $Ep_{1,2,l}$ zu dem die Proportionalität bestimmt werden soll, aus der großen Klammer der rechten Seite der Gleichung heraus, so tritt an die Stelle von $Ep_{3,2,l}$, $\frac{Ep_{3,2,l}}{Ep_{1,2,l}}$; ändert sich dieser Bruch, so hört die Proportionalität für verschiedene $Ep_{1,2,l}$ und $Ep_{1,2,x}$ bezw. $Ep_{1,2,o}$ auf. Praktisch kommt, da $_l$ sich auf den Kabelanfang in der Zentrale bezieht, nur die Bedingung in Betracht, daß obiger Bruch gleich bleibt und mithin am Kabelende nur $Ep_{1,2,o}$ nicht aber $Ep_{3,2,o}$ gegeben sein kann, denn eine Annahme über das absolute Potential $Ep_{2,o}$ des Außenleiters (bei $x = o$) am Kabelende läßt sich nicht aufstellen, mithin läßt sich $Ep_{3,2,o}$ nicht vorherbestimmen, sondern nur aus den vorgeschriebenen Bedingungen berechnen.

Handelt es sich also darum, bei vorgeschriebener Endspannung $Ep_{1,2,o}$ und unter der Voraussetzung, daß $\frac{Ep_{3,2,l}}{Ep_{1,3,l}}$ denselben Wert behalte, die Berechnung des elektrischen Zustandes vorzunehmen, so wird man zuerst die Rechnung für $Ep_{1,2,l}$ und $Ep_{3,2,l}$ durchführen, um durch Proportionatität bei der vorgeschriebenen Spannung $Ep_{1,2,o}$ die gesuchte Spannung $Ep_{1,2,l}$ zu finden.

Analoges gilt für die Stromstärken. Es ist natürlich zu berücksichtigen, daß in diesem Falle die ursprüngliche Phasenzählung von der Anfangsspannung aus beibehalten wurde, andernfalls wären

die Winkel, entsprechend dem von Anfangs- und Endspannung gebildeten zu ändern.

VIII. Berechnung der Induktionskoeffizienten aus den Kabeldimensionen.

Was die Formeln der elektrischen Daten für den vorliegenden, speziellen Fall betrifft, so sind dieselben bis auf diejenigen, die Induktionskoeffizienten bedeuten, aus der Tabelle I S. 60 in Roessler, Fernleitung zu entnehmen.

Für die letzteren gilt das schon S. 5 Gesagte und sind die in dem Ausdruck für die magnetische Energie

$$W_m = \frac{L J_1^2}{2} + M J_1 J_3 + \frac{N J_3^2}{2}$$

vorkommenden Koeffizienten L, M und N zu bestimmen, mithin die magnetische Energie für den vorliegenden Fall zu berechnen und auf diese Form zu bringen. Es mögen die in nebenstehender Figur angegebenen Bezeichnungen verwandt werden und die magnetische Energie pro Kabellängeneinheit berechnet werden. Die bekannte physikalische Formel zur Berechnung von W_m lautet:

$$W_m = \frac{1}{8\pi}\int \mu \mathfrak{H}^2 \, d\tau$$

wobei μ die magnetische Permeabilität bedeutet, und da kein Eisen vorliegt, $\mu = 1$ zu setzen ist, $\mathfrak{H}$ bedeutet die magnetische Feldstärke, $d\tau$ ein Volumenelement.

Wir gehen vom Zentrum aus und berechnen die magnetische Energie der der Figur entsprechenden

und Bleimantel: $J = J_1 + -(J_1 + J_3) = -J_3$ da der einzelnen Teile, also beginnen wir mit der auf den Innenleiter entfallenden Energie; durch Indices, die sich auf den Radius beziehen, sei der Raum, für den die jeweilige magnetische Energie berechnet ist, bestimmt. Bezeichnen wir mit ς den variabeln Radius, so ist das Integral der magnetischen Kraft, längs des ganzen Umfanges eines Kreises mit diesem Radius:

$$\mathfrak{H}\, 2\pi\varsigma = 4\pi J$$

J ist der Strom, der durch die Fläche des betreffenden Kreises mit dem Radius ς hindurchgeht, bezeichnen wir mit S die Stromdichte, so ist:

$$J = S\pi\varsigma^2$$

Da durch den Kreis mit dem Radius r_1 der Gesamtstrom J_1 des Innenleiters fließt, so ist:

$$J_1 = S\pi r_1^2$$

und

$$\mathfrak{H} = \frac{2\varsigma}{r_1^2} J_1; \; \mathfrak{H}^2 = \frac{4\varsigma^2}{r_1^4} J_1^2;$$

$$W_{m,0,1} = \frac{1}{8\pi} \int_0^{r_1} \mu \mathfrak{H}^2 d\tau; \; d\tau = 2\pi\varsigma\, d\varsigma l;$$

$$W_{m,0,1} = \frac{1}{8\pi} \int_0^{r_1} \mu \frac{4\varsigma^2 J_1^2}{r_1^4} 2\pi\varsigma\, d\varsigma l;$$

worin $\mu = 1$ und $l = 1$ zu setzen ist, gemäß auf vorheriger Seite gesagtem, folglich:

$$W_{m,0,1} = \frac{1}{4} J_1^2;$$

Die Berechnung der übrigen magnetischen Energien ist in folgendem analog ausgeführt, wobei noch zu bemerken ist, daß für die Zwischenräume der Leiter, also für die Isolatoren die in der Formel: $\mathfrak{H} 2\pi\varsigma = 4\pi J$ vorkommende Stromstärke konstant ist und zwar für den Raum zwischen Innenleiter und Außenleiter ist $J = J_1$ und für den zwischen Außenleiter

Strom J_1 des Innenleiters durch den im Außenleiter fließenden ihm entgegengerichteten Strom in seiner Wirkung vernichtet wird; das Vorzeichen von J_3 kommt hier nicht in Betracht, da bei der Berechnung der Energien immer die Quadrate der Ströme auftreten und mithin sich für den Raum zwischen Außenleiter und Bleimantel unabhängig davon, ob J_3 positiv oder negativ ist, dieselbe magnetische Energie ergibt. Dasselbe ließe sich bezüglich J_1 für den Raum zwischen Innenleiter und Außenleiter sagen. Es ist ja auch ohne weiteres selbstverständlich, daß für die Berechnung der Energie es vollkommen gleichgültig ist, ob der eine oder andere Leiter als Hin- oder Rückleitung aufgefaßt wird.

Wie auf Seite 2 schon gesagt, haben wir hier den Außenleiter als den Rückleiter der beiden Ströme aufgefaßt. Für die Berechnung der magnetischen Energien der Räume des Außenleiters und Bleimantels ist natürlich darauf zu achten, daß bei der Addition die Ströme die entgegengesetzten Vorzeichen haben, alles übrige ergibt sich in folgendem von selbst.

Berechnung der magnetischen Energie $W_{m,1,2}$:

$$2\pi\varsigma\mathfrak{H} = 4\pi J_1; \; W_{m,1,2} = \frac{1}{8\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{4J_1^2}{\varsigma^2}\,2\pi\varsigma d\varsigma = J_1^2 \ln\frac{r_2}{r_1};$$

Berechnung von $W_{m,2,2'}$;

$$2\pi\varsigma\mathfrak{H} = 4\pi\left\{J_1 + \frac{\varsigma^2 - r_2^2}{r_2'^2 - r_2^2}\cdot - (J_1 + J^3)\right\};$$

$$\mathfrak{H}^2 = \frac{4}{(r_2'^2 - r_2^2)^2}\left\{J_1^2\left(\frac{r_2'^4}{\varsigma^2} + \varsigma^2 - 2r_2'^2\right) + J_3^2\left(\frac{r_2^4}{\varsigma^2} + \varsigma^2 - 2r_2^2\right) + 2J_1J_3\left[\frac{r_2^2 \cdot r_2'^2}{\varsigma^2} + \varsigma^2 - (r_2^2 + r_2'^2)\right]\right\};$$

$$W_{m,2,2'} = \frac{1}{8\pi}\int_{r_2}^{r_2'} \mu\mathfrak{H}^2 d\tau = J_1^2\left\{\frac{r_2'^4}{(r_2'^2 - r_2^2)^2}\ln\frac{r_2'}{r^2} + \frac{r_2^2 - 3r_2'^2}{4(r_2'^2 - r_2^2)}\right\} + J_3^2\left\{\frac{r_2^4}{(r_2'^2 - r_2^2)^2}\ln\frac{r_2'}{r^2} + \frac{r_2'^2 + 3r_2'}{4(r_2'^2 - r_2^2)}\right\} +$$

$$+ 2J_1J_3\left\{\frac{r_2^2 \cdot r_2'^2}{(r_2'^2 - r_2^2)^2}\ln\frac{r_2'}{r_2} - \frac{1}{4}\frac{r_2'^2 + r_2^2}{r_2'^2 - r_2^2}\right\};$$

Berechnung von $W_{m,2',3}$;

$$2\pi\varsigma\mathfrak{H} = 4\pi(-J_3);$$

$$W_{m,2',3} = \frac{1}{8\pi}\int_{r_2'}^{r_3} \mu\mathfrak{H}^2 d\tau = J_3^2 \ln\frac{r_3}{r_2'};$$

Berechnung von $W_{m,3,3'}$;

$$2\pi\varsigma\mathfrak{H} = 4\pi\{-J_3 + \pi(\varsigma_2 - r_3^2)S_3\}; \quad S_3 = \frac{J_3}{\pi(r_3'^2 - r_3^2)};$$

$$\mathfrak{H}^2 = \frac{4J_3^2}{(r_3'^2 - r_3^2)^2}\left(\varsigma^2 + \frac{r_3'^4}{\varsigma^2} - 2r_3'^2\right);$$

$$W_{m,3,3'} = \frac{1}{8\pi}\int_{r_3}^{r_3'} \mu\mathfrak{H}^2 d\tau = J_3^2\left\{\frac{r_3'^4}{(r_3'^2 - r_3^2)^2}\ln\frac{r_3'}{r_3} + \frac{r_3^2 - 3r_3'^2}{4(r_3'^2 - r_3^2)}\right\}$$

Die gesamte magnetische Energie

$$W_m = W_{m,o,1} + W_{m,1,2} + W_{m,2,2'} + W_{m,2',3} + W_{m,3,3'};$$

Wir wollen diese Ausdrücke zusammenziehen und sie in der Form schreiben:

$$W_m = \frac{\mathfrak{L}J_1^2}{2} + \mathfrak{M}J_1J_3 + \frac{\mathfrak{N}J_3^2}{2};$$

so ergibt sich:

$$W_m = \frac{J_1^2}{2}\left[\frac{1}{2} + 2\ln\frac{r_2}{r_1} + 2\frac{r_2'^4}{(r_2'^2 - r_2^2)^2}\ln\frac{r_2'}{r_2} + \frac{1}{2}\frac{r_2^2 - 3r_2'^2}{r_2'^2 - r_2^2}\right] +$$

$$+J_1 J_3\left[2\,\frac{r_2^2\,.\,r_2'^2}{(r_2'^2-r_2^2)^2}\ln\frac{r_2'}{r_2}-\frac{1}{2}\,\frac{r_2'^2+r_2^2}{r_2'^2-r_2^2}\right]+$$

$$+\frac{J_3^2}{2}\left[2\ln\frac{r_3}{r_2'}+2\frac{r_2^4}{(r_2'^2-r_2^2)^2}\ln\frac{r_2'}{r_2}+\frac{1}{2}\,\frac{r_2'^2-3r_2^2}{r_2'^2-r_2^2}+\right.$$

$$\left.+2\,\frac{r_3'^4}{(r_3'^2-r_3^2)}\ln\frac{r_3'}{r_3}+\frac{1}{2}\,\frac{r_3^2-3r_3'^2}{r_3'^2-r_3^2}\right];$$

oder nach Umformung der Koeffizienten bei J_1^2 und J_3^2:

$$W_m=\frac{J_1^2}{2}\left[2\ln\frac{r_2}{r_1}+2\frac{r_2'^4}{(r_2'^2-r_2^2)^2}\ln\frac{r_2'}{r_2}-\frac{r_2'^2}{r_2'^2-r_2^2}\right]+$$

$$+J_1 J_3\left[2\,\frac{r_2^2\,.\,r_2'^2}{(r_2'^2-r_2^2)^2}\ln\frac{r_2'}{r_2}-\frac{1}{2}\,\frac{r_2'^2+r_2^2}{r_2'^2-r_2^2}\right]+$$

$$+J_2^2\left[2\ln\frac{r_3}{r_2'}+2\,\frac{r_2^4}{(r_2'^2-r_2^2)^2}\ln\frac{r_2'}{r_2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2r_3'^4}{(r_3'^2-r_3^2)^2}\ln\frac{r_3'}{r_3}+\frac{1}{2}\,\frac{r_2^2+r_2'^2}{r_2^2-r_2'^2}+\frac{1}{2}\,\frac{r_3^2+r_3'^2}{r_3^2-r_3'^2}\right];$$

worin also die Ausdrücke in den eckigen Klammern die Koeffizienten $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ bedeuten.

Zur Prüfung der Richtigkeit der Koeffizienten $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{N}$ wollen wir auf zwei schon von Drude und Brillouin behandelte Spezialfälle übergehen und diese Ergebnisse mit den von uns abgeleiteten vergleichen. In Drude, Physik des Aethers S. 214, findet sich die Gesamtinduktion für den einfachen Fall abgeleitet, in dem ein Hohlzylinder vorliegt, in dessen Innern sich ein koachsialer Vollzylinder befindet, bei dem der eine die Rückleitung des Stromes des andern bildet. Setzen wir in unserm Fall $J_3=0$, so reduziert sich derselbe auf den von Drude behandelten. Es muß mithin unser Koeffizient $\mathfrak{L}$ (der Ausdruck in der ersten eckigen Klammer der rechten Seite der letzten Gleichung für W_m) übereinstimmen mit dem Koeffizienten von Drude, S. 214, Gleichung 37:

$$\mathfrak{L} = l\left\{ 2\mu_0 \ln \frac{R_1'}{R_2} + 2\mu_1 \frac{R_1^4}{(R_1^2 - R_1'^2)^2} \ln \frac{R_1}{R_1'} - \mu_1 \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_1'^2} + \frac{\mu_2 - \mu_1}{2} \right\};$$

Berücksichtigen wir die Gleicheit folgender Bezeichnungen:

$$r_1 = R_2;\; r_2 = R_1';\; r_2' = R_1;$$

so erkennen wir, daß die Formel Drude's unserm Koeffizienten $\mathfrak{L}$ bei den gleichen Voraussetzungen $\mu = 1$, $l = 1$ vollkommen entspricht, mithin die Richtigkeit des Koeffizienten $\mathfrak{L}$ nachgewiesen ist.

Ziehen wir den von Brillouin (Propagation de l'électricité, p. 188) behandelten Fall in Betracht, so unterscheidet sich derselbe insofern von dem von Drude betrachteten, als an die Stelle des Vollzylinders ein zweiter koachsialer Hohlzylinder tritt.

Setzen wir in unserer Formel für W_m, $J_1 = 0$; so erhalten wir:

$$W_m = \frac{1}{2} \mathfrak{N} J_3^2,$$

wobei also $\mathfrak{N}$ jetzt den Induktionskoeffizienten für den Fall Brillouins bedeutet, der denselben (p. 188) in die Form brachte:

$$2 \ln \frac{a'}{b} - \frac{2a^4}{(b^2 - a^2)^2} \ln \frac{a}{b} - \frac{2b'^4}{(b'^2 - a'^2)^2} \ln \frac{a'}{b'} - \frac{1}{2} \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - \frac{1}{2} \frac{b'^2 + a'^2}{b'^2 - a'^2}$$

worin

$$a = r_2;\; b = r_2';\; a' = r_3;\; b' = r_3';$$

Dieser Ausdruck ist identisch mit unserm Koeffizienten $\mathfrak{N}$, dessen Richtigkeit wir so kontrolliert haben.

Diese vollkommene Übereinstimmung war selbstverständlich, da sowohl die Ableitung von Drude und

Brillouin, wie auch die unserige auf der Berechnung der magnetischen Energie fußten.

Diese verdient vor der mit Hilfe des Kraftflusses schon deshalb den Vorzug, weil die letzterer zu Grunde liegende Definition einen fadenförmigen Stromkreis voraussetzt, der in praktischen Fällen ausgeschlossen ist.

Außerdem kam für das vorliegende Beispiel nur die Berechnung mit Hilfe der magnetischen Energie in Betracht, da es sich darum handelte, die Selbstinduktionskoeffizienten und den gegenseitigen Induktionskoeffizienten zweier verketteter Stromkreise zu bestimmen.

Nachdem wir uns im vorhergehenden von der Richtigkeit der Koeffizienten $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{N}$ überzeugt haben, möge der Koeffizient $\mathfrak{M}$ noch näher betrachtet werden. Dem Anschein nach zu urteilen, scheint derselbe negativ zu werden. Prüfen wir, ob und warum dies der Fall sein muß. Wir setzen zu diesem Zwecke $x = \frac{r_2}{r_2'}$ und erhalten nach einigen Umformungen:

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{\frac{1}{x} - x}\left(\frac{2}{\frac{1}{x} - x} \ln \frac{1}{x} - \frac{1}{2x} - \frac{x}{2}\right);$$

Entsprechend der Bedeutung von r_2 und r_2' ist

$$0 < x < 1$$

mithin $\frac{1}{\frac{1}{x} - x}$ stets positiv. Um nachzuweisen, daß $\mathfrak{M}$ negativ ist, bleibt also festzustellen, ob

$$\frac{2}{\frac{1}{x} - x} \ln \frac{1}{x} < \frac{1}{2x} + \frac{x}{2}$$

oder $$1 < xe^{\left(\frac{1}{2x}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$
und $$y > 1$$
wenn $$y = xe^{\left(\frac{1}{2x}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$ gesetzt ist;
mithin $$\frac{dy}{dx} = e^{\left(\frac{1}{2x}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}\left(-\frac{1}{2x^2} - \frac{x^2}{2} + 1\right)$$
für $x = 1$ ist $y = 1$; im vorliegenden Fall ist $x < 1$ damit die Bedingung erfüllt ist $y > 1$ muß also noch festgestellt werden, ob $\frac{dy}{dx}$ negativ wird für $0 < x < 1$. Hierzu ist erforderlich, daß der Klammerausdruck in der Formel für $\frac{dy}{dx}$ negativ wird, also

$$1 < \frac{1}{2x^2} + \frac{x^2}{2}$$

Setzen wir $$y' = \frac{1}{2x^2} + \frac{x^2}{2}$$

so ist $$\frac{dy'}{dx} = x\left(-\frac{1}{x^4} + 1\right)$$

Da für $x = 1$, $y' = 1$ wird und für $0 < x < 1$, $\frac{dy'}{dx}$ negativ wird, so wird $y' > 1$ für $0 < x < 1$, mithin $\frac{dy}{dx}$ negativ, also auch $y > 1$, folglich ist nach vorhergehendem $\mathfrak{M}$ negativ. Wir erkennen den Grund hierfür in folgender Überlegung.

Denken wir uns den Außenleiter in zwei Teile zerlegt, (siehe Figur S. 16, punktierte Linie), von dem der eine den Strom J_1 führt, der andere J_3, so würde man die magnetische Energie der beiden Stromkreise J_1 und J_3 für sich unabhängig von einander berechnen können.

In der Formel für $\mathfrak{L}$ verkleinert sich aber bei der Zerlegung die Dimension r_2' und in derjenigen

für $\mathfrak{N}$ vergrößert sich r_2. Es läßt sich nun nachweisen, daß diese Veränderungen der Radien die Koeffizienten $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{N}$ selbst verkleinern.

Betrachten wir zu diesem Zweck:

$$\mathfrak{L} = 2 \ln \frac{r_2}{r_1} + 2 \frac{r_2'^4}{(r_2'^2 - r_2^2)^2} \ln \frac{r_2'}{r_2} - \frac{r_2'^2}{r_2'^2 - r_2^2}$$

Der erste Summand der rechten Seite dieser Gleichung ist unabhängig von r_2' und kommt also nicht in Frage. Die beiden andern Summanden formen wir etwas um und setzen:

$$z = \frac{2}{(1 - x^2)^2} \ln \frac{1}{x} - \frac{1}{1 - x^2}$$

worin wie früher:

$$x = \frac{r_2}{r_2'}; \qquad 0 < x < 1;$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2x}{(1 - x^2)^2} \left(\frac{4}{1 - x^2} \ln \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - 1 \right);$$

Damit infolge Verkleinerung von r_2' also Vergrößerung von x eine Abnahme von z stattfindet, muß $\frac{dz}{dx}$ negativ werden. Das ist nur möglich wenn:

$$\frac{4}{1 - x^2} \ln \frac{1}{x} < \frac{1}{x^2} + 1$$

oder

$$1 < x e^{\left(\frac{1}{2x}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

Der Nachweis, daß diese Bedingung für den in Betracht kommenden Wert von x erfüllt ist, wurde vorher (S. 23) schon erbracht.

Somit ist festgestellt, daß bei zunehmendem x d. h. abnehmendem r_2' der Wert z und infolgedessen der Koeffizient $\mathfrak{L}$ abnimmt.

Weit einfacher ergibt sich, daß durch Zunahme von r_2 sich $\mathfrak{N}$ verkleinert.

Die in Betracht kommenden r_2 enthaltenen Summanden der Formel für $\mathfrak{N}$ sind:

$$\frac{2r_2^4}{(r_2'^2 - r_2^2)^2} \ln \frac{r_2'}{r_2} + \frac{1}{2} \frac{r_2^2 + r_2'^2}{r_2^2 - r_2'^2}$$

setzen wir wie früher $x = \frac{r_2}{r_2'}$, so lautet der Ausdruck nach einiger Umformung;

$$\frac{2}{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2} \ln \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - x}$$

Es läßt sich sofort übersehen, daß bei wachsendem x also zunehmendem r_2 letzterer Ausdruck kleiner wird und mithin $\mathfrak{N}$ selbst bei zunehmendem r_2 abnimmt.

Die magnetische Energie für die beiden Stromkreise für sich hätte also kleinere Koeffizienten $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{N}$ als im vorliegenden Fall. Wir erkennen also hierin den Grund, warum $\mathfrak{M}$ negativ werden mußte.

IX. Zahlenbeispiel für das offene Kabel.

Auf der im vorhergehenden geschaffenen Grundlage möge nun ein Zahlenbeispiel behandelt werden.

Aus den Kabelabmessungen gemäß der Normalien des Verbandes Deutscher Elektrotechniker (siehe Teichmüller, die Erwärmung der elektrischen Leitungen, Anhang I Tabelle 3, Kabelabmessungen nach Angaben der Felten & Guilleaume-Lahmeyer Werke, S. 250) für konzentrische Zweileiterkabel für 3000 Volt, greifen wir für unsern Fall das stärkste Kabel, das mithin die größten Kapazitäten hat, heraus:

Die Dimensionen desselben sind, abgesehen von unwesentlichen Abrundungen folgende:

$$r_1 = 10 \text{ mm}$$
$$r_2 = 14 \text{ mm}$$
$$r_2' = 17 \text{ mm}$$
$$r_3 = 22 \text{ mm}$$
$$r_3' = 25 \text{ mm}$$

Zur Erläuterung dieser Bezeichnungen gilt wieder Figur S. 16.

Der Berechnung des Ohm'schen Widerstandes sei der spezifische Widerstand des Kupfers 1 : 55 unter Berücksichtigung der Erwärmung zugrunde gelegt. Der spezifische Widerstand des Bleimantels sei 0,22. Es ergibt sich dann:

$$w_1 = 0{,}05774 \text{ km}^{-1}$$
$$w_2 = 0{,}06208 \text{ km}^{-1}$$
$$w_3 = 0{,}508 \text{ km}^{-1}$$

Gemäß S. 20 finden wir

$$\mathfrak{L} = 1{,}3159 \cdot 10^{-4} \text{ Henrykm}^{-1}$$
$$\mathfrak{M} = -0{,}07544 \cdot 10^{-4} \text{ Henrykm}^{-1}$$
$$\mathfrak{N} = 0{,}79755 \cdot 10^{-4} \text{ Henrykm}^{-1}$$

$\mathfrak{M}$, das übrigens im Verhältnis zu $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{N}$ außerordentlich klein ist, wird negativ, wie im vorherigen Kapitel begründet wurde.

Die Kapazitäten berechnen sich nach der Formel: $0{,}0241\, \varepsilon \dfrac{1}{\log \dfrac{\delta_i}{d}}$ MF; (siehe Roessler S. 60), wobei die Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = 4{,}2$ ist.

An Stelle des Verhältnisses zweier Durchmesser ist in folgendem das Verhältnis entsprechender Radien gewählt und wir erhalten mithin:

$$c_{1,2} = 0{,}0241 \cdot 4{,}2 \frac{1}{\log \frac{r_2}{r_1}} \text{ km}^{-1} \text{ (in MF)};$$

$$c_{1,2} = 0{,}6926 \cdot 10^{-6} \text{ Faradkm}^{-1}$$

entsprechend:

$$c_{2,3} = 0{,}904 \,.\, 10^{-6} \text{ Faradkm}^{-1}.$$

Unter der Annahme einer Periodenzahl $\nu = 50$ P. p. S. folgt:

$$i\omega c_{1,2} = 217{,}587 \,.\, 10^{-6} i$$
$$i\omega c_{2,3} = 284{,}0 \,.\, 10^{-6} i$$

Der Isolationstrom berechnet sich nach den Angaben in Roessler, S. 60. 61 und zwar wird derselbe so klein, daß er etwa $\frac{1}{2 \,.\, 10^6}$ des Kondensatorstromes beträgt; er kann mithin vernachläßigt werden.

Nachdem die Berechnung der Daten des betrachteten Kabels erledigt ist, wenden wir uns dem vorauszusetzenden elektrischen Zustand zu.

Die Spannung $Ep_{1,2,l} = 3000$ Volt bedeutet, daß zwischen Innenleiter und Außenleiter am Kabel a n f a n g, d. h. an den Klemmen der Maschine eine solche vorhanden ist.

Um das Problem mathematischer Behandlung zugänglich zu machen, rechnen wir mit einem nur am Kabelanfang geerdeten Bleimantel, – es wurde deshalb auch schon der endliche Widerstand w_3 des Bleimantels berechnet.

Bezeichnen wir das absolute Potential des Bleimantels nur mit dem einen dem Bleimantel zukommenden Index, so ist $Ep_{3,l} = 0$, infolge der eben an der Stelle vorausgesetzten Erdung.

Die Annahme über die Spannung $Ep_{3,2,l}$ bietet jetzt weiter keine Schwierigkeit, wenn wir an die Betrachtungen in Roessler S. 62 anknüpfen. Wir setzen mithin voraus, daß das eine Potential des einen Poles der Stromquelle ebensoviel über dem Potential der Erde liegt, wie das andere unter diesem Potential liegt. In diesem Sinne ist

$$Ep_{1,l} = 1500 \text{ Volt}$$
$$Ep_{2,l} = -1500 \text{ Volt}$$
$$Ep_{1,l} - Ep_{2,l} = Ep_{1,2,l} = 3000 \text{ Volt}$$

mithin

$$Ep_{3,l} - Ep_{2,l} = Ep_{3,2,l} = 1500 \text{ Volt.}$$

Nach Beendigung der Berechnung werden wir auf die Frage zurückkommen, in wiefern sich dieser Fall von dem praktischen unterscheidet, bei dem der Widerstand des Bleimantels infolge mehrfacher Erdung annähernd gleich Null gesetzt werden könnte. Die oben aufgestellten Voraussetzungen sind natürlich unabhängig davon.

Die S. 6 näher definierten Werte v_1 und v_3 ergeben sich entsprechend der berechneten Kabeldaten und der Periodenzahl $\nu = 50$ P. p. S. wie folgt:

$$v_1 = (8{,}854 + 9{,}24i)\,10^{-3};$$
$$v_3 = (2{,}904 + 4{,}188i)\,10^{-3};$$

Diese Werte bleiben die gleichen, so lange Kabeldaten und Periodenzahl sich nicht ändern, und sind mithin unabhängig von der Art der Beanspruchung des Kabels (gleichgültig, ob es offen oder belastet ist) und auch unabhängig von der Kabellänge.

Gemäß der vorhin gemachten Annahmen wollen wir mit Hilfe der S. 11 aufgestellten Gleichungen zuerst das Verhalten des offenen Kabels bei unendlicher Länge ($x = \infty$) untersuchen; wir erhalten nach Einsetzen der Konstanten für $x = l$ die Stromgleichungen:

$$1.\quad J_{1,l} = \frac{(A[v_3^2 - HD] - B)(e^{v_1 l} - e^{-v_1 l})}{v_1 (v_3^2 - v_1^2)(e^{v_1 l} + e^{-v_1 l})} + \frac{(A[v_1^2 - HD] - B)(e^{v_3 l} - e^{-v_3 l})}{v_3 (v_1^2 - v_3^2)(e^{v_3 l} + e^{-v_3 l})};$$

$$2.\quad J_{3,l} = \frac{1}{HF}\left\{\frac{(v_1^2 - HD)(A[v_3^2 - HD] - B)(e^{v_1 l} - e^{-v_1 l})}{v_1(v_3^2 - v_1^2)(e^{v_1 l} + e^{-v_1 l})} + \frac{(v_3^2 - HD)(A[v_1^2 - HD] - B)(e^{v_3 l} - e^{-v_3 l})}{v_3(v_1^2 - v_3^2)(e^{v_3 l} + e^{-v_3 l})}\right\}$$

und für $x = 0$ die Spannungsgleichungen:

$$3.\quad Ep_{1,2,0} = \frac{1}{H}\left\{v_1 \frac{A(v_3^2 - HD) - B}{v_1(v_3^2 - v_1^2)(e^{v_1 l} + e^{-v_1 l})} . 2 + v_3 \frac{A(v_1^2 - HD) - B}{v_3(v_1^2 - v_3^2)(e^{v_3 l} + e^{-v_3 l})} . 2\right\};$$

$$4.\quad Ep_{3,2,0} = \frac{1}{FHK}\left\{v_1 \frac{A(v_3^2 - HD) - B}{v_1(v_3^2 - v_1^2)(e^{v_1 l} + e^{-v_1 l})} . (v_1^2 - HD) . 2 + v_3 \frac{A(v_1^2 - HD) - B}{v_3(v_1^2 - v_3^2)(e^{v_3 l} + e^{-v_3 l})} . (v_3^2 - HD) . 2\right\};$$

Für die Stromgleichungen bei $x = l = \infty$ werden die Werte $e^{-v_1 l}$ und $e^{-v_3 l}$ gleich Null und es fallen dann $e^{v_1 l}$ und $e^{v_3 l}$ aus den Gleichungen heraus, da im Zähler und Nenner jedes Bruches die gleichen Werte dieser Art stehen. Wir erhalten also zwei endliche Ausdrücke für $J_{1,l=\infty}$ und $J_{3,l=\infty}$; da $l = \infty$ sich auf den Kabelanfang bezieht, so sind die in das Kabel von unendlicher Länge einströmenden Kondensatorströme damit bezeichnet. Nach der Einsetzung der betreffenden Zahlenwerte in die oben angeführten Gleichungen 1 und 2 ergibt sich:

$$J_{1,l=\infty} = 122{,}8\, e^{i 134^0 30' 44''}$$
$$J_{3,l=\infty} = 25\, e^{i 151^0 37' 28''}$$

Was die Spannungsgleichungen betrifft, so sehen wir, daß am Kabelende also bei $x = 0$ infolgedessen, daß die Brüche im Zähler reell und im Nenner ∞ groß sind

$$Ep_{1,2,0} = 0 \text{ und } Ep_{3,2,0} = 0;$$

Es war dies vorauszusehen, da auch im einfachen

Fall von nur einer Hin- und einer Rückleitung die Spannung am Ende gleich Null wurde; die Stromstärke berechnet sich in diesem Fall hingegen zu:

$$J_{l=\infty} = 124{,}34\, e^{i 135^0 18' 40''}$$

Vergleichen wir dieselbe mit der entsprechenden unseres Falles $J_{1, l=\infty}$ so sehen wir nur einen geringen Unterschied zwischen beiden Resultaten, sowohl was die Amplitude als auch was die Phasenverschiebung betrifft. Es ist dies dem Umstande zuzuschreiben, daß die Ströme von der betreffenden Spannung abhängig sind und diese in beiden Fällen von dem gleichen Wert (3000 Volt am Kabelanfang) zum Wert Null gelangen, wenn auch die Spannungsänderungen in beiden Fällen nach verschiedenen Gleichungen vor sich gehen.

Es sei unter den gleichen Voraussetzungen wie vorhin das unendlich lange offene Kabel, jetzt das offene Kabel von der Länge $l = 100$ km behandelt. Es ergeben sich folgende Werte:

a) nach der einfachen Methode, Kapazität des Außenleiters gegen Bleimantel vernachlässigt:	b) nach vorliegender Methode, Kapazität des Außenleiters gegen Bleimantel berücksichtigt:
$J_{l=100} = 66{,}75\, e^{i 84^0 35' 24''}$	$J_{1,l=100} = 65{,}47 e^{i 83^0 16' 30''}$
—	$J_{3,l=50} = 35{,}67 e^{i 58^0 37'}$
$Ep_0 = 3123{,}78 e^{i(360^0 - 7^0 39')}$	$Ep_{1,2,0} = 3063 e^{i(360^0 - 9^0 16' 24'')}$
—	$Ep_{3,2,0} = 1285 e^{i(360^0 - 50^0 13' 54'')}$

Wir sehen, daß sowohl $Ep_{1,2,0} < Ep_0$ wie $J_{1,0} < J_0$ es lag dies auch nahe, denn wir können die Kabelbetrachtung, nachdem wir die Spannungen an beiden Enden kennen, auf die Betrachtung eines Kondensators zurückführen, wobei wir als Spannung desselben als angenäherten Wert das arithmetische

Mittel aus Anfang- und Endspannung nehmen, in diesem Sinne ist es selbstverständlich, daß bei abnehmender Spannung auch die Stromstärke abnimmt; die Auffassung des arithmetischen Mittels als mittlere Spannung ist natürlich nicht genau, aber wenn die Spannungszunahme eine geringe ist, so fällt dieser Umstand nicht sehr ins Gewicht.

Nach obiger Auffassung des Kabels als Kondensator würde sich ergeben

$J_{l,k} \cong 67,3$ amp. $J_{1,l,k} \cong 66$ amp. $J_{3,l,k} \cong 39,5$ amp.

Der Unterschied zwischen den vorhin errechneten Werten ist für die beiden ersten ungefähr 0,5 amp., also sehr gering. Für $J_{3,l}$ beträgt er zirka 3 amp. Wir erkennen hier sofort den Grund darin, daß $Ep_{3,2,l}$ stark gefallen ist, bis es den Wert $Ep_{3,2,0}$ erreicht hat, die Ungenauigkeit des arithmetischen Mittels wurde hier bedeutender, mithin die Auffassung des Kabels als Kondensator mit dieser Spannung als Mittel weniger zutreffend.

Der Grund für die starke Veränderung von $Ep_{3,2}$ liegt in dem im Verhältnisse zu w_1 und w_2 sehr großen Widerstand w_3 des Bleimantels (vgl. S. 26).

Würden wir den Widerstand des Bleimantels unter Voraussetzung wiederholter Erdung desselben vernachlässigen, so hätte dies einen noch höheren Bleimantelstrom zur Folge, weil die Spannung $Ep_{3,2}$ dann nicht auf diesen Wert hätte fallen können.

Bei obiger Voraussetzung würde man den Strom im Bleimantel schätzungsweise finden können durch einfache Kondensatorberechnung und dem Fall entsprechende Schätzung der Mittelspannung.

Was die Phasenverschiebungen anbetrifft, so sehen wir auch hier wieder, wie für den einfachen Fall, daß die Spannung am Kabelende der Spannung

am Kabelanfang nacheilt. Wir erinnern daran, daß diese letztere zum Ausgang der Phasenzählung gewählt wurde. Die Voreilung von $J_{1,l}$ unterscheidet sich nicht viel von der von J_l, die Nacheilung von $Ep_{1,2,0}$ ist ebenso nicht bedeutend größer als die von Ep_0. Wir sehen, daß diese Werte überhaupt keine große Verschiedenheit aufweisen.

Daß unter sich $J_{1,l}$ und $J_{3,l}$ sowohl wie $Ep_{1,2,0}$ und $Ep_{3,2,0}$ größere Verschiebungen haben, liegt vorwiegend an dem schon S. 31 erwähnten Verhältnis von w_3 zu den beiden andern Widerständen, es ergibt sich dies bei der komplizierten Rechnungsart nicht direkt, sondern wurde durch Verfolgung derselben Schritt für Schritt beobachtet.

Für das gleiche Kabel wurde die Berechnung für verschiedene Längen ausgeführt, wie aus weiter unten folgender Tabelle (S. 34) zu ersehen ist.

Für die Länge $l = 10$ km ergab schon die angenäherte Berechnung, daß das Kabel ohne weiteres bei dieser Länge als einfacher Kondensator aufzufassen ist, es wurden deshalb die abgerundeten Werte für die Ströme angegeben und die Spannungen ungeändert übernommen; zur Rechtfertigung letzteres Umstandes möge erwähnt sein, daß beispielsweise der Ausdruck

$$e^{v_3 l} + e^{-v_3 l} = 1{,}9987 + 0{,}0025i$$

wurde, bei $l = 10$ km; bei $l = 0$ hingegen

$$e^{v_3 l} + e^{-v_3 l} = 2$$

Wir sehen, daß bei $l = 0$ und $l = 10$ km die Ausdrücke fast identisch sind, annäherndes ist für den andern in Betracht kommenden Ausdruck $e^{v_1 l} + e^{-v_1 l}$ der Fall. Es ergibt sich mithin, daß die Spannungen an der Stelle $x = 0$ und $x = 10$ km sich nicht wesentlich von einander unterscheiden, also Spannung am Kabelende und Kabelanfang aneinander gleich sind.

Wir können also mit Recht sagen, daß bei der Länge $l = 10$ km die Spannung über das ganze Kabel hinweg mit großer Annäherung die gleiche ist, dieser Umstand hat aber zur Folge, daß der von dem Kabel aufgenommene Ladestrom sich als ein einfacher Kondensatorstrom berechnen läßt.

Die allgemeine Frage ob diese Auffassung bei gleich welchem Kabel und gleich welcher Länge zulässig ist, erledigt sich immer durch Berechnung der Werte

$$e^{v_1 l} + e^{-v_1 l}$$

und

$$e^{v_3 l} + e^{-v_3 l}$$

für den früher mit a) bezeichneten Fall gilt das gleiche; es kommt natürlich dort nur $e^{v_1 l} + e^{-v_1 l}$ in Betracht.

Je mehr sich genannte Ausdrücke dem Wert 2 nähern, umsomehr hat obige Auffassung ihre Berechtigung!

Wir haben also immer für solche Fälle, für die es nahe liegt, ein Kabel als einen Kondensator zu betrachten, ein einfaches Mittel zur Prüfung unserer Vermutung.

Wie wir aus der Tabelle S. 36 ersehen, ist die Änderung von $J_{1,l}$ ziemlich der Länge des Kabels proportional, bei $l = 50$ km hat sie den halben Wert desjenigen bei $l = 100$ km und bei $l = 10$ km etwa den 10. Teil letzteres Wertes. Die entsprechende Spannung $Ep_{1,2,0}$ hat bei $l = 50$ km eine halb so große Erhöhung erfahren, wie bei $l = 100$ km, also auch darin besteht Proportionalität. Die Änderung der Spannung ist im Verhältnis zu ihrer Größe nicht bedeutend, und daraus erklärt sich, daß die Ströme $J_{1,l}$ annähernd den Längen proportional sind. Anders gestaltet sich dieses Verhalten bei den Strömen $J_{3,l}$; wir erkennen nach eben gesagtem sofort den Grund

Tabelle.

Vergleich der auftretenden Werte bei verschiedenen Längen für 3000 Volt am Kabelanfang und Beginn der Phasenverschiebung von dieser Spannung $Ep_{1,2,l}$ aus.

	$l = 10$ km	$l = 50$ km	$l = 100$ km	$l = \infty$
$J_{1,l} =$	$6{,}5 e^{i 89^{\circ} 52'}$	$32{,}79 e^{i 88^{\circ} 0' 42''}$	$65{,}47 e^{i 83^{\circ} 16' 30''}$	$122 e^{i 34^{\circ} 30' 44''}$
$J_{3,l} =$	$4{,}2 e^{i 89^{\circ} 50'}$	$21{,}02 e^{i 81^{\circ} 1' 16''}$	$35{,}67 e^{i 58^{\circ} 37'}$	$25 e^{i 51^{\circ} 37' 28''}$
$Ep_{1,2,0} =$	3000	$3031 e^{i(360^{\circ} - 2^{\circ} 48' 41'')}$	$3063 e^{i(360^{\circ} - 9^{\circ} 16' 24'')}$	0
$Ep_{3,2,0} =$	1500	$1487 e^{i(360^{\circ} - 13^{\circ} 49' 14'')}$	$1285 e^{i(360^{\circ} - 50^{\circ} 13' 54'')}$	0

darin, daß hier die Änderungen der entsprechenden Spannungen $Ep_{3,2,0}$ viel bedeutender sind.

Wir haben schon für $l = 10$ km und $l = 100$ km über den zulässigen Vergleich des Kabels mit einem einzelnen Kondensator gesprochen; für $l = 50$ km erkennen wir auch, daß bei Annahme einer dem früher gesagten entsprechenden Mittelspannung wir für $J_{1,l}$ nahezu den gleichen Wert erhalten.

Da sich übrigens die Mittelspannung so wenig von der Anfangsspannung unterscheidet, fänden wir auch den annähernd gleichen Strom, wenn wir das Kabel als einen Kondensator mit dieser Spannung auffaßten, es ergibt sich dann $J_{1,l} = 32{,}64$ im Gegensatz zu 32,79.

Wir sehen also, daß für $J_{1,l}$ noch bei $l = 50$ km sich ungefähr der gleiche Strom ergibt, bei der einfachen Kondensatorbetrachtung wie bei der genauen Berechnung.

Für $J_{3,l}$ ergibt sich analog das gleiche bei $l = 50$ km. Wir erkennen sofort den Grund darin, daß hier der Unterschied zwischen Anfang- und Endspannung $Ep_{3,2}$ sehr klein geworden ist, noch kleiner als bei $Ep_{1,2}$. Wir bemerkten schon S. 15, daß die Gesetzmäßigkeit, nach der sich die beiden Spannungen $Ep_{1,2}$ und $Ep_{3,2}$ ändern, eine ganz verschiedene ist, an den Werten der Tabelle erkennen wir es deutlich.

Wir sehen aus der Tabelle auch, daß $J_{3,l=\infty}$ kleiner ist als $J_{3,l=100}$, für $J_{1,l}$ würde es sich bei entsprechendem l ebenso zeigen, daß der bei unendlich langem Kabel auftretende Wert $J_{1,l=\infty}$ überschritten werden kann.

Es sind jedoch keine endlichen Längen über $l = 100$ km herangezogen worden, weil für unser Problem, das sich durch Berücksichtigung der Kapa-

zität des Außenleiters gegen den Bleimantel charakterisiert, noch im verstärkten Maße natürlich das gilt, was in Roessler S. 216 im allgemeinen über Kabellängen gesagt wurde, nämlich daß bei den heutigen Wechselströmen eine Kraftübertragung nur bis 50 höchstens 100 km aussichtsreich ist.

Die Werte der Phasenverschiebung wurden für $l = 100$ km schon besprochen, für $l = 50$ km ergibt sich, daß die Voreilung für $J_{3,l=50}$ sich dem Wert 90^0 in viel stärkerem Maße nähert, als für $J_{3,l=100}$, aber doch von 90^0 noch viel mehr abweicht als $J_{1,l}$, was durch den verschiedenen Charakter der beiden Gleichungen für $J_{1,l}$ und $J_{3,l}$ hinlänglich erläutert ist. Bei $l = 10$ km unterscheiden sich die Phasenverschiebungen so wenig voneinander (und von 90^0), daß diese Unterschiede nicht mehr in Betracht kommen können. Im übrigen gilt analog das S. 31, 32 für $l = 100$ km gesagte.

Bevor wir das offene Kabel verlassen, möge darauf hingewiesen werden, daß eine Vernachlässigung der Induktion in unserm Fall unzulässig gewesen wäre, denn das Verhältnis der in Betracht kommenden Größen $w_1 : \omega\mathfrak{L}$ etc. ist ein so kleines, daß bei Vernachlässigung von $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ die ganze Rechnung eine erhebliche Veränderung erfahren haben würde. Nur in Fällen, in denen dieses Verhältnis außerordentlich groß wäre, könnte eine solche Voraussetzung zugelassen werden.

Es wurde in vorliegendem Zahlenbeispiel das stärkste der in genannter Tabelle (siehe S. 34) aufgeführten üblichen Kabel behandelt; es zeigt sich bei diesem naturgemäß am meisten der Einfluss der Kapazitäten, da bei schwächeren Kabeln entsprechend den Daten der oben genannten Tabelle die Kapazitäten immer kleiner werden.

X. Zahlenbeispiel für das belastete Kabel.

Mit Hilfe der Gleichungen I'–IV' S. 8 haben wir auf S. 9 die für das am Ende offene Kabel gültigen Konstantenwerte bestimmt. Betrachten wir nun den Fall der Belastung, wobei an der Stelle $x = 0$ der Strom $J_{1,0}$ entnommen werde, der vorläufig noch von beliebiger Größe und Phase sein möge. Es ist selbstverständlich, daß $J_{3,0} = 0$ bleibt, da der Bleimantel offen ist.

In den Bestimmungsgleichungen S. 10 verändert sich, wenn wir wie früher von der Spannung am Kabelanfang ausgehen, also nur Gl. I''. Diese lautet für das so belastete Kabel:

$$\text{I}''. \quad C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = J_{1,0}$$

Wir erhalten nun für die 4 Konstanten folgende neuen Werte, die durch Einsetzen in die Bestimmungsgleichungen kontrolliert wurden:

$$C_1 = \frac{(v_3^2 - HD)(A + J_{1,0} v_1 e^{-v_1 l}) - B}{v_1 (e^{v_1 l} + e^{-v_1 l})(v_3^2 - v_1^2)};$$

$$C_2 = \frac{(v_3^2 - HD)(-A + J_{1,0} v_1 e^{v_1 l}) + B}{v_1 (e^{v_1 l} + e^{-v_1 l})(v_3^2 - v_1^2)};$$

$$C_3 = \frac{(v_1^2 - HD)(A + J_{1,0} v_3 e^{-v_3 l}) - B}{v_3 (e^{v_3 l} + e^{-v_3 l})(v_1^2 - v_3^2)};$$

$$C_4 = \frac{(v_1^2 - HD)(-A + J_{1,0} v_3 e^{v_3 l}) + B}{v_3 (e^{v_3 l} + e^{-v_3 l})(v_1^2 - v_3^2)}$$

Die für das offene Kabel gefundenen Konstanten wollen wir von nun ab mit C_1', C_2', C_3', C_4' bezeichnen; es lassen sich dann die neuen Konstanten auf folgende Form bringen:

$$C_1 = \frac{J_{1,0} e^{-v_1 l} (v_3^2 - HD)}{(v_3^2 - v_1^2)(e^{v_1 l} + e^{-v_1 l})} + C_1'$$

$$C_2 = \frac{J_{1,0}\, e^{v_1 l}(v_3^2 - HD)}{(v_3^2 - v_1^2)(e^{v_1 l} + e^{-v_1 l})} + C_2'$$

$$C_3 = \frac{J_{1,0}\, e^{-v_3 l}(v_1^2 - HD)}{(v_1^2 - v_3^2)(e^{v_3 l} + e^{-v_3 l})} + C_3'$$

$$C_4 = \frac{J_{1,0}\, e^{v_3 l}(v_1^2 - HD)}{(v_1^2 - v_3^2)(e^{v_3 l} + e^{-v_3 l})} + C_4'$$

Die Gleichungen I' bis IV' (S. 8) lauten dann:

$$\text{I'}.\ J_{1,x} = J_{1,0}\left\{\frac{v_3^2 - HD}{(v_3^2 - v_1^2)(e^{v_1 l} + e^{-v_1 l})}(e^{-v_1 l} \cdot e^{v_1 x} + e^{v_1 l} \cdot e^{-v_1 x}) + \frac{v_1^2 - HD}{(v_1^2 - v_3^2)(e^{v_3 l} + e^{-v_3 l})}(e^{-v_3 l} \cdot e^{v_3 x} + e^{v_3 l} \cdot e^{-v_3 x})\right\} + C_1' e^{v_1 x} + C_2' e^{-v_1 x} + C_3' e^{v_3 x} + C_4' e^{-v_3 x};$$

$$\text{II'}.\ J_{3,x} = \frac{1}{HF} J_{1,0}\left\{\frac{(v_1^2 - HD)(v_3^2 - HD)}{(v_3^2 - v_1^2)(e^{v_1 l} + e^{-v_1 l})}(e^{-v_1 l} \cdot e^{v_1 x} + e^{v_1 l} \cdot e^{-v_1 x}) + \frac{(v_3^2 - HD)(v_1^2 - HD)}{(v_1^2 - v_3^2)(e^{v_3 l} + e^{-v_3 l})}(e^{-v_3 l} \cdot e^{v_3 x} + e^{v_3 l} \cdot e^{-v_3 x})\right\} + \frac{1}{HF}\left\{(v_1^2 - HD)(C_1' e^{v_1 x} + C_2' e^{-v_1 x}) + (v_3^2 - HD)(C_3' e^{v_3 x} + C_4' e^{-v_3 x})\right\};$$

$$\text{III'}.\ Ep_{1,2,x} = \frac{1}{H} J_{1,0}\left\{\frac{v_1(v_3^2 - HD)}{(v_3^2 - v_1^2)(e^{v_1 l} + e^{-v_1 l})}(e^{-v_1 l} \cdot e^{v_1 x} - e^{v_1 l} \cdot e^{-v_1 x}) + \frac{v_3(v_1^2 - HD)}{(v_1^2 - v_3^2)(e^{v_3 l} + e^{-v_3 l})}(e^{-v_3 l} \cdot e^{v_3 x} - e^{v_3 l} \cdot e^{-v_3 x})\right\} + \frac{1}{H}\left\{v_1(C_1' e^{v_1 x} - C_2' e^{-v_1 x}) + v_3(C_3' e^{v_3 x} - C_4' e^{-v_3 x})\right\};$$

$$\text{IV'}.\ Ep_{3,2,x} = \frac{1}{HKF} J_{1,0}\left\{\frac{v_1(v_1^2 - HD)(v_3^2 - HD)}{(v_3^2 - v_1^2)(e^{v_1 l} + e^{-v_1 l})}(e^{-v_1 l} \cdot e^{v_1 x} - e^{v_1 l} \cdot e^{-v_1 x}) + \frac{v_3(v_3^2 - HD)(v_1^2 - HD)}{(v_1^2 - v_3^2)(e^{v_3 l} + e^{-v_3 l})}\right.$$

$$(e^{-v_3 l} \cdot e^{v_3 x} - e^{v_3 l} \cdot e^{-v_3 x}) \} + \frac{1}{HKF} \{ v_1 (v_1^2 - HD)$$

$$(C_1' e^{v_1 x} - C_2' e^{-v_1 x}) + v_3 (v_3^2 - HD)(C_3' e^{v_3 x} - C_4' e^{-v_3 x}) \} ;$$

Wie wir sehen, sind die den Faktor $J_{1,0}$ nicht enthaltenden Ausdrücke in jeder Gleichung gleich den entprechenden Werten bei offenen Kabeln, führen wir dafür $J'_{1,x}$, $J'_{3,x}$, $Ep'_{1,2,x}$, $Ep'_{3,2,x}$ ein, so ergibt sich:

$$\text{I}''.\ J_{1,x} = J_{1,0} \{ \ldots\ldots\ldots \} + J'_{1,x}$$

$$\text{II}''.\ J_{3,x} = \frac{1}{HF} J_{1,0} \{ \ldots\ldots\ldots \} + J'_{3,x}$$

$$\text{III}''.\ Ep_{1,2,x} = \frac{1}{H} J_{1,0} \{ \ldots\ldots\ldots \} + Ep'_{1,2,x}$$

$$\text{IV}''.\ Ep_{3,2,x} = \frac{1}{HKF} J_{1,0} \{ \ldots\ldots\ldots \} + Ep'_{3,2,x}$$

Die durch Punkte angedeuteten Ausdrücke in den Klammern sind dieselben geblieben, wie in den vorigen Gleichungen und deshalb nicht wiederholt.

Wie wir aus den vorstehenden Gleichungen ersehen, setzen sich die rechten Seiten aus 2 Ausdrücken zusammen, von denen der letztere die für das offene Kabel in Betracht kommende Größe bezeichnet, der erstere aber durch den am Ende entnommenen Strom bestimmt wird und ihm proportional ist.

Für das früher gewählte Kabel gestalten sich bei $l = 100$ km nach Berechnung der Faktoren von $J_{1,0}$ die Gleichungen wie folgt:

$$1.\ J_{1,l=100} = J_{1,0}(1{,}033 - 0{,}136i) + J'_{1,l}$$

$$2.\ J_{3,l=100} = -J_{1,0}(0{,}058 + 0{,}0524i) + J'_{3,l}$$

$$3.\ Ep_{1,2,0} = -J_{1,0}(12{,}24 + 2{,}8i) + Ep'_{1,2,0}$$

$$4.\ Ep_{3,2,0} = -J_{1,0}(4{,}203 - 3{,}413i) + Ep'_{3,2,0}$$

Bevor wir weitergehen, wollen wir die Faktoren bei $J_{1,0}$ etwas näher betrachten; in der ersten

Gleichung ist der reelle Teil des betreffenden Faktors positiv aus dem Grunde, da sich zu dem Ladestrom ein dem Belastungsstrom $J_{1,0}$ proportionaler Wert addiert, welcher um so weniger von diesem abweicht, je kürzer das betrachtete Kabel ist. Selbst hier bei $l = 100$ km ist der Unterschied des Faktors bei $J_{1,0}$ von 1 nicht bedeutend; betrachten wir seine algebraische Form (S. 41), so erkennen wir sofort, daß, je mehr sich die auf S. 32, 33 besprochenen Ausdrücke

$$e^{v_1 l} + e^{-v_1 l}$$

und

$$e^{v_3 l} + e^{-v_3 l}$$

dem Wert 2 nähern, der Faktor selbst sich dem Wert 1 nähert. Gemäß S. 32 ist dieser also bei bei 10 km hinreichend genau erreicht, sodaß auch hier im Belastungsfalle wieder eine einfachere Rechnung Platz greift, indem nur zum Ladestrom der am Kabelende verlangte Nutzstrom in seiner komplexen Form addiert zu werden braucht, um den von der Maschine zu entnehmenden Strom seiner Größe und Phase nach festzustellen.

Ähnliche Betrachtungen des Faktors von $J_{1,x}$ bei $J_{3,x}$ in Gleichung II' S. 41 ergeben, daß dieser Wert verschwindet, wenn

$$e^{v_1 l} + e^{-v_1 l} = 2$$

und

$$e^{v_3 l} + e^{-v_3 l} = 2$$

gesetzt werden kann und mithin $J_{3,l}$ die gleiche Größe hat, wie bei offenem Kabel.

Wir sehen auch jetzt schon bei $l = 100$ km, daß der Zahlenwert des Faktors ziemlich klein ist und werden wir später (in nächster Tabelle S. 44 und 45) bestätigt finden, daß keine bedeutenden Veränderungen des durch die Kapazität gegen Bleimantel

hervorgerufenen Ladestromes $J_{3,l}$ für das offene oder belastete Kabel statthaben.

In der Spannungsgleichung 3 S. 39 ist der Faktor von $J_{1,0}$ negativ, was selbstverständlich zu erwarten war, infolge des Umstandes, daß durch das Hinzutreten des Belastungsstromes ein Spannungsabfall in den beiden Leitern vorhanden ist.

Interessant ist noch zu beobachten, daß der reelle Teil des Faktors bei $J_{1,0}$ in Gleichung 3 sich wenig von dem hier in Betracht kommenden Ohmschen Widerstand der beiden Leiter unterscheidet, letzterer ist für $l = 100$ km: $100\,(w_1 + w_2) = 11{,}98$ (betr. w_1 und w_2 s. S. 26); der in Frage kommende Unterschied ist mithin nur 0,26 oder 2,2 % des Ohm'schen Widerstandes.

Es lag dies nahe, denn bei $J_{1,0}$ in Gleichung 1 S. 42 wich der Faktor in seinem reellen Teil auch ein wenig von 1 ab.

Auch in der Spannungsgleichung 4 S. 39 ist der größere, reelle Teil des Faktors bei $J_{1,0}$ negativ. $Ep_{3,2,0}$ hat infolge des durch den Nutzstrom im Außenleiter hervorgerufenen Spannungsabfalles bei belastetem Kabel einen kleineren Wert als bei offenem Kabel.

Zur Feststellung der Unterschiede der Strom- und Spannungswerte für den Fall a) bei dem die Kapazität gegen Bleimantel nicht berücksichtigt ist und b) unter Berücksichtigung derselben, ist es erforderlich, für den ersten Fall noch die Gleichungen aufzustellen: (s. Roessler S. 55)

$$J_x = C_1 e^{vx} + C_2 e^{-vx}$$

$$Ep_x = \frac{v}{K}\left(C_1 e^{vx} - C_2 e^{-vx}\right)$$

oder unter Berechnung der Konstanten gemäß S. 37 gesagtem:

$$J_x = J_0 \frac{2}{e^{\nu l} + e^{-\nu l}} + J'_x$$

$$Ep_x = - J_0 \frac{\nu}{K} \frac{e^{\nu l} - e^{-\nu l}}{e^{\nu l} + e^{-\nu l}} + Ep'_x$$

oder 1'. $J_l = J_0 (1{,}03 - 0{,}138 i) + J'_l$

2'. $Ep_0 = - J_0 (12{,}61 + 3{,}062 i) + Ep'_0$

Es möge hier an das eben über die Faktoren bei $J_{1,0}$ gesagte in bezug auf die hier bei J_0 auftretenden erinnert werden und auf die geringfügigen Unterschiede entsprechender Faktoren hingewiesen werden. Mit Hilfe letzterer beiden Gleichungen und derjenigen 1—4 S. 39 wurde die weiter unten folgende Tabelle (s. S. 44, 45) aufgestellt.

Da wir in der Tabelle wie früher wieder die Spannung am Kabelanfang als Ausgang unserer Berechnungen gewählt (vergl. S. 15 über $Ep_{3,2,0}$), so müssen wir auch von dieser die dem Nutzstrome $J_{1,0}$ erteilte Phasenverschiebung zählen. Zur allgemeinen Betrachtung der auftretenden Werte ist es offenbar gleichgiltig, wohin wir den Ausgang der Phasenzählung legen. Wir werden später sehen, daß wir es doch in der Hand haben, mit Hilfe dieser bisherigen Gleichungen Fälle zu betrachten, in denen die Phasenverschiebung zwischen dem Nutzstrome und der Spannung am Kabelende beispielsweise gleich Null vorgeschrieben ist, in welchem Falle die Anfangsspannung zu suchen wäre; die Phasenzählung bleibt dann trotzdem von letzterer aus beibehalten.

Wie wir aus der Tabelle ersehen können, sind die entsprechenden Werte für Fall a) und b) nicht sehr von einander verschieden.

Wir hatten dasselbe schon S. 30 beim offenen Kabel festgestellt und mußten jetzt gemäß unserer Gleichungen und des oben gesagten zu ähnlichen

Werten kommen. Wir erkennen mithin, daß im vorliegenden Beispiel die einfache Methode zur Bestimmung von $Ep_{1,2,0}$ und $J_{1,0}$ wenn nicht möglichst genau Rechnung erfordert wird, hinreicht.

Was $J_{3,l}$ betrifft, so sehen wir aus der Gleichung 3 S.39 wie auch aus der vorhergehenden Tabelle, daß es für alle Fälle kleiner ist als bei offenem Kabel, das auf S. 30 behandelt wurde. Mit Hilfe der auf dieser Seite angegebenen Werte berechnet sich beim offenen Kabel die von der Kapazität gegen Bleimantel herrührende Effektaufnahme:

$$Ep_{3,2,l} \cdot J_{3,l} \cdot \cos(Ep_{3,2,l}, J_{3,l}) = 27{,}8 \text{ KW}$$

Dieser Wert übertrifft die entsprechenden Effektaufnahmen A''_l bei belastetem Kabel.

Wir finden also das erfreuliche Ergebnis, daß bei Belastung die Kapazität gegen Bleimantel weniger nachteilig ins Gewicht fällt. Dieser Umstand erklärt sich dadurch, daß der durch den Nutzstrom hervorgerufene Spannungsabfall die Spannung zwischen Außenleiter und Bleimantel und mithin den Ladestrom $J_{3,l}$ herabsetzt.

Während die übrigen elektrischen Größen bei jeder Veränderung der Phasenverschiebung sehr stark variieren, wird $J_{3,l}$ dadurch nicht bedeutend beeinflußt. Bei dem bisher angenommenen Wert des Nutzstromes $J_{1,0} = 100e^{i\alpha}$ würde überhaupt der Wirkungskreis sich nur um 1,6 % bis höchstens 4,5 % ändern, wenn ohne $J_{3,l}$ gerechnet würde. Bei kleineren Nutzströmen würde sich diese Änderung freilich stärker bemerklich machen, worauf bei einer späteren Berechnung näher eingegangen werden wird (Tabellen S. 49,50). Hier möge genügen festgestellt zu haben, daß die ungünstigste Einwirkung des Stromes $J_{3,l}$ bei offenem Kabel auftritt.

Tabelle.

Kabel, belastet mit $J_{1,0} = 100\,e^{i\alpha}$ bei der Spannung $Ep_{1,2,l} = 3000$

$l = 100$ km A_0 bezw. A_l bedeutet Effekt

	a) nach der einfachen Methode: Kapazität des Außenleiters gegen Bleimantel vernachläßigt.		
$\alpha =$	45^0	0^0	-45^0
$J_{1,l} =$	$157\,e^{i55^0\,35'15''}$	$120{,}65\,e^{i25^0 44'48''}$	$71\,e^{i(360^0-13^0 6'54'')}$
$J_{3,l} =$	—	—	—
$Ep_{1,2,0} =$	$2860\,e^{i(360^0-32^0 15')}$	$1973\,e^{i(360^0-21^0 29'54'')}$	$2004\,e^{i7^0 24'30''}$
$Ep_{3,2,0} =$	—	—	—
$\sphericalangle(J_{1,l}Ep_{1,2,l}) = \varphi_l =$	$55^0\ 35'\ 15''$	$25^0\ 44'\ 48''$	$-13^0\ 6'\ 54''$
$\sphericalangle(J_{1,0}Ep_{1,2,0}) = \varphi_0 =$	$77^0\ 15'$	$21^0\ 29'\ 54''$	$-52^0\ 24'\ 30''$
$A_0 =$	62,92	177,57	122,24
$A_l =$ $(A'_l + A''_l)^* =$	266 —	336,6 —	207,5 —
$\eta =$	23,64	52,75	58,81

* A'_l ist der Effektverlust durch Innenleiter; A''_l derjenige durch Außen-

am Kabelanfang; Phasenzählung von dieser Spannung aus am Kabelende bezw. Anfang in K. W.

b) nach vorliegender Methode: Kapazität des Außenleiters gegen Bleimantel berücksichtigt.		
45^0	0^0	-45^0
$156{,}95\, e^{i 54^0 51' 46''}$	$122{,}26 e^{i 24^0 52' 36''}$	$73{,}2 e^{i(360^0 - 13^0 55' 18'')}$
$29{,}06 e^{i 52^0 47' 12''}$	$28{,}27 e^{i 63^0 5' 4''}$	$32{,}68 e^{i(70^0 39' 18'')}$
$2822{,}6 e^{i(360^0 - 74^0 59')}$	$1960 e^{i(360^0 - 23^0 16' 12'')}$	$1966{,}4 e^{i 5^0 5'}$
$1073 e^{i(360^0 - 74^0 59')}$	$752 e^{i(360^0 - 58^0 17' 36'')}$	$868 e^{i(360^0 - 30^0 10' 12'')}$
$54^0\, 51'\, 46''$	$24^0\, 52'\, 36''$	$-13^0\, 55'\, 18''$
$78^0\, 24'\, 6''$	$23^0\, 16'\, 12''$	$-50^0\, 5'$
56,76	180,05	126,24
297,5 (271,1 + 26,4)	351,88 (332,68 + 19,2)	229,4 (213,2 + 16,2)
19,08	51,15	55,03

leiter und Bleimantel.

Wir ersehen ferner aus der Tabelle, daß in allen Fällen die Stromstärke am Kabelanfang derjenigen am Kabelende, also der Nutzstromstärke voreilt. Im Fall a) und b) unterscheiden sich die Voreilungen nicht sehr wesentlich von einander, wenigstens nicht viel mehr als die Stromstärken selbst.

Je weniger die Stromstärke $J_{1,l}$ der Spannung $Ep_{1,2,l}$ voreilt, um so geringer werden ihre Werte, so daß da, wo die Stromstärke von der Voreilung zur Nacheilung übergegangen und $\sphericalangle (J_{1,l}, Ep_{1,2,l}) = -13^0 55' 18''$ geworden, die in das Kabel eintretende Stromstärke $J_{1,l} = 73{,}2 e^{i(360^0 - 13^0 55', 18'')}$ bedeutend kleiner ist als der aus dem Kabel austretende Strom $J_{1,0} = 100 e^{i(360^0 - 45^0)}$.

Die Veränderung der Phasenverschiebungen der Spannungen ist nicht so bedeutend. Solange die Stromstärke $J_{1,l}$ noch der Anfangsspannung voreilt, (in den ersten beiden Fällen) eilt die Endspannung der Anfangsspannung nach, erst nachdem $J_{1,l}$ gegen $Ep_{1,2,l}$ nacheilt, tritt eine Phasenvoreilung von $Ep_{1,2,0}$ gegen $Ep_{1,2,l}$ ein. Man erkennt, daß ihr Verhalten sich unter einander entspricht. Dasselbe sehen wir für $J_{3,l}$ und $Ep_{3,2,0}$; $J_{3,l}$ eilt in allen Fällen vor, $Ep_{3,2,0}$ ebenso in allen Fällen nach.

Wir sehen außerdem noch bestätigt, daß je kleiner die Verschiebung zwischen Anfangsspannung und Anfangsstromstärke, desto größer der Wirkungsgrad ist, sowohl im Fall a) wie Fall b). Besonders deutlich tritt die Wirkung der Phasenverschiebung bei $\alpha = 45^0$ hervor, also da, wo φ_l den größten Wert hat. Trotz des Umstandes, daß hier der Spannungsabfall von $Ep_{1,2}$ der geringste ist, wird der Wirkungsgrad um mehr als die Hälfte kleiner als in den beiden andern Fällen: $\alpha = 0^0$ und $\alpha = -45^0$, was durch die

bedeutende Voreilung des Anfangsstromes vor der Anfangsspannung begründet ist.

In den **beiden** ersten Fällen hat der am Kabelende entnommene Strom eine **Voreilung** (φ_0 ist positiv, bei Synchronmotoren vorkommend) gegenüber der Spannung, aber je nachdem wie groß dieselbe ist, ändert sich φ_l und der Wirkungsgrad bedeutend. Im dritten Fall, wo φ_0 negativ ist, liegt induktive Belastung vor. Hier ist der Wirkungsgrad am günstigsten.

Wäre unter sonst gleichen Voraussetzungen der Fall induktionsloser Belastung zu behandeln, so können wir durch folgende Überlegung ohne Schwierigkeit von den bisher behandelten Fällen zu diesem übergehen.

Wir benutzen hierzu die Gleichung 3, S. 39:

$$Ep_{1,2,0} = - J_{1,0}(12{,}24 + 2{,}8i) + Ep'_{1,2,0};$$

Da nach früheren $Ep'_{1,2,0}$ der Wert bei offenem Kabel ist, so ändert sich derselbe bei gleicher Anfangsspannung wie früher (3000 Volt) nicht. $J_{1,0}$ soll wie im letzt behandelten Fall = 100 amp. sein, es möge in der komplexen Nebenform ausgedrückt werden:

$$J_{1,0} = P + iQ$$

so daß $\sqrt{P^2 + Q^2} = 100$; da nach der Voraussetzung $Ep_{1,2,0}$ und $J_{1,0}$ gleiche Phase haben sollen, so ist

$$Ep_{1,2,0} = k(P + iQ)$$

worin k ein noch unbekannter reeller Faktor ist. Führen wir noch folgende Formen ein:

$$Ep_{1,2,0} = P' + iQ'$$

$$(12{,}24 + 2{,}8i) = p + iq$$

so lautet Gleichung 3:

$$k(P + iQ) = -(P + iQ)(p + iq) + P' + iQ'$$

Da $\sqrt{P^2 + Q^2} = 100$; so enthält die Gleichung nur zwei unbekannte, k und P oder Q.

Durch Trennung der reellen Teile von den imaginären ergibt sich, wenn $Q = \sqrt{100^2 - P^2}$ gesetzt wird:

$$1.\quad (k + p)\, P - q \sqrt{100^2 - P^2} = P'$$

$$2.\quad (k + p) \sqrt{100^2 - P^2} + qP = Q'$$

$$P^2 + P \frac{-2qQ'\,100^2}{P'^2 + Q'^2} + 100^2 \frac{q^2\,100^2 - P'^2}{P'^2 + Q'^2} = 0$$

oder wenn $\frac{-2qQ'\,100^2}{P'^2 + Q'^2} = a$

und $100^2 \frac{q^2\,100^2 - P'^2}{P'^2 + Q'^2} = b$ gesetzt wird

$$P^2 + Pa + b = 0 \qquad \text{mithin}$$

$$P = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}; \quad k = \frac{P' + q\sqrt{100^2 - P^2}}{P} - p;$$

Durch P und k sind aber nach obigem $J_{1,0}$ und $Ep_{1,2,0}$ bestimmt, die der Forderung genügen, gleiche Phase zu haben. Mit Hilfe der Gleichungen S. 39 lassen sich dann für dieses $J_{1,0}$ die übrigen Werte $J_{3,l}$ und $Ep_{3,2,0}$ bestimmen.

Entsprechendes gilt natürlich auch für den einfachen Fall betreff Gleichung 2′ S. 42, um dort J_0 zu bestimmen, das phasengleich mit Ep_0 ist und einen vorgeschriebenen Wert hat.

Mit Hilfe der vorliegenden Beziehungen sind bei sonst gleichen Voraussetzungen wie für Tabelle S. 44, 45 bei induktionsloser Belastung und verschiedenen Nutzströmen auf S. 52, 53 die sich für den Fall a) und b) ergebenden Werte zusammengestellt, die uns über den Einfluß der Veränderung der Nutzströme Aufschluß geben.

Da $Ep_{3,2,0}$ für die weitere Erörterung nicht mehr in Betracht kommt, so ist die Aufstellung dieses Wertes unterblieben. Ebenso ist $Ep_{3,2,l}$ nicht aufgeführt, weil nach den Annahmen (S. 27)

Tabelle.

Fall a. Verhalten des Kabels bei verschiedenen induktionslosen ($\varphi_0 = 0$) Belastungen aber konstanter Spannung $Ep_l = 3000$ Volt am Kabelanfang, behandelt nach der einfachen Methode unter Vernachlässigung der Kapazität des Außenleiters gegen Bleimantel.

$l = 100$ km.

$J_0 =$	$100 e^{i(360^0 - 13^0 20' 53'')}$	$50 e^{i(360^0 - 10^0 31' 54'')}$	$25 e^{i(360^0 - 9^0 2' 24'')}$	0; d. h. offenes Kabel
$J_l =$	$107{,}16 e^{i 15^0 51' 32''}$	$74{,}09 e^{i 42^0 45' 14''}$	$66{,}62 e^{i 62^0 20' 40''}$	$66{,}75 e^{i 84^0 35' 24''}$
$Ep_0 =$	$1831{,}4 e^{i(360^0 - 13^0 20' 58'')}$	$2481{,}08 e^{i(360^0 - 10^0 31' 54'')}$	$2818 e^{i(360^0 - 9^0 2' 24'')}$	$3123{,}78 e^{i(360^0 - 7^0 39')}$
$\varphi_l =$	$15^0 51' 32''$	$42^0 45' 14''$	$62^0 20' 40'$	$84^0 35' 24''$
$A_0 =$	183,14	124,054	70,45	—
$A_l =$	309,3	163,2	92,74	19,16
$\eta =$	59,2	76,2	75,9	—

Tabelle.

Fall b. Verhalten des Kabels unter den gleichen Bedingungen wie in vorheriger Tabelle S. 49 aber unter Berücksichtigung der Kapazität des Außenleiters gegen Bleimantel.

$J_{1,0} =$	$100e^{i(360^0-14^0 32' 16'')}$	$50e^{i(360^0-12^0 2' 18'')}$	$25e^{i(360^0-10^0 24')}$	0; d. h. offen. Kabel
$J_{1,l} =$	$107{,}38e^{i13^0 58' 41''}$	$74{,}03e^{i40^0}$	$65{,}39e^{i60^0 17' 30''}$	$65{,}47e^{i83^0 16' 30''}$
$J_{3,l} =$	$29{,}27e^{i66^0 31' 40''}$	$32{,}3e^{i61^0 59' 29''}$	$33{,}97e^{i60^0 9' 10''}$	$35{,}67e^{i58^0 37'}$
$Ep_{1,2,0} =$	$1823e^{i(360^0-14^0 32' 16')}$	$2448e^{i(360^0-12^0 2' 18'')}$	$2755{,}8e^{i(360^0-10^0 24')}$	$3063e^{i(360^0-9^0 16' 24'')}$
$\varphi_l =$	13° 58′ 41″	40°	60° 17′ 30″	83° 16′ 30″
$A_0 =$	182,3	122,4	68,9	—
$A_l =$ $(A'_l + A''_l) =$	330,08 (312 + 17,48)	192,87 (170,12 + 22,75)	122,68 (97,3 + 25,38)	50,8 (23 + 27,8)
$\eta =$	55,2	63,45	56,1	—

$$Ep_{3,2,l} = \frac{1}{2} Ep_{1,2,l}$$

Für die gleiche aber induktionslose Belastung wie in Tabelle S. 44, 45 (Nutzstrom = 100 amp.) finden wir beim Vergleich der Fälle a) (S. 49) und b) (S. 50) keine bedeutenderen Abweichungen entsprechender Werte als bisher. Die erste Spalte für Fall b) der Tabelle S. 50 kann in die Tabelle S. 44, 45 zwischen die vorletzte und letzte Spalte eingeschoben gedacht werden, da diesen Spalten $\alpha = 0^0$ und $\alpha = -45^0$ entpricht und $\varphi_0 = 0$, $\alpha = -14^0 32' 16''$ zukommt. Die Werte der eingeschoben gedachten Spalte passen sich ihrer Einreihung in Tabelle S. 44, 45 an und lassen uns die Lage der Minimalwerte der Spannungen erkennen.

Die geringfügigen Änderungen, die wir in den verschiedenen Fällen bei $J = 100$ bemerkt haben, zeigten weit weniger interessantes, als der Vergleich bei verschiedenen Belastungen, der zuerst für den Fall a) mit Fall b) angestellt werden möge. Wenn auch die zusammengehörigen Stromstärken und Spannungen keine bedeutenden Abweichungen zeigen, so wird doch infolge des Umstandes, daß der Bleimantelstrom sich mit Abnahme des Nutzstromes immer mehr dem Wert bei offenem Kabel nähert und bei abnehmender Belastung mithin zunimmt, der Wirkungsgrad sich von dem im Falle a) errechneten wesentlich unterscheiden müssen und zwar umsomehr, je geringer der Nutzstrom ist. Schreiben wir

$$\eta = \frac{A_0}{A'_l + A''_l}$$

(wobei betreff A'_l und A''_l das in Anmerkung zur Tabelle S. 44, 45 gesagte gilt), so sehen wir ohne weiteres, daß bei Verringerung von A_0 und A'_l und bei Vergrößerung von A''_l der Wirkungsgrad durch A''_l sehr

ungünstig beeinflußt wird. Da dieser Wert A''_l in Tabelle S. 49 fehlt (weil ohne Berücksichtigung der Kapazität des Außenleiters gegen Bleimantel aufgestellt), so ist der größere Unterschied in den Wirkungsgraden bei kleineren Nutzströmen, wenn man Fall a) und b) vergleicht, hinreichend erklärt. Daß bei Betrachtung der Werte η in jedem Falle für sich bei $J = 50$ und $J = 25$ sich für den ersteren Wert ein etwas günstigerer Wirkungsgrad ergibt, ist dem Umstande zuzuschreiben, daß der Betrag der Effektaufnahme, der dem offenen Kabel zukommt, bei $J = 25$ für die Berechnung von η mehr in Betracht kommt, infolge der Verkleinerung der anderen Werte.

Der im Kabel verbleibende Effekt: $A_l - A_0$ ist, wie aus der Tabelle ersichtlich, natürlich in allen Fällen größer als bei offenem Kabel.

Es möge noch auf das in beiden Fällen gefundene bemerkenswerte Ergebnis hingewiesen werden, daß die Stromaufnahme bei offenem Kabel diejenige bei der Belastung mit 25 amp. etwas übersteigt. Natürlich ist der Leistungsfaktor, mit dem die Maschine den Strom liefern muß, im Falle der Belastung bedeutend größer, wie sich aus der Betrachtung von φ_l bestätigt.

Wir sind in Tabelle S. 50 von der Generatorspannung ausgegangen; es möge zum Vergleich der praktisch näherliegende Fall, daß die Spannung am Kabelende vorgeschrieben ist, noch behandelt werden, die übrigen Bedingungen der Tabelle S. 50 aber beibehalten bleiben; also die Belastung wieder als induktionslos angesehen werden. Dieselben Überlegungen, die schon auf S. 47, 48 gemacht wurden, gestatten uns auch hier von der Gleichung 3 S. 39 auf den vorliegenden Fall überzugehen, mit dem

Unterschiede, daß jetzt $Ep_{1,2,0}$ gegeben ist anstatt $Ep_{1,2,l}$ Da außerdem $J_{1,0} = \sqrt{P^2 + Q^2}$ der Größe nach vorgeschrieben ist und der Phase nach mit $Ep_{1,2,0}$ zusammenfallen soll, so ist der S. 52 gebrauchte Faktor k sofort durch $\frac{Ep_{1,2,0}}{J_{1,0}}$ zu bestimmen. $Ep'_{1,2,0}$ wird sich nun der Gleichung entsprechend ändern, so daß wenn das ursprüngliche $Ep'_{1,2,0} = P' + iQ'$ gesetzt wird, hier $Ep'_{1,2,0} = k'(P' + iQ')$ sein wird, wobei k' ein reeller Faktor ist, denn wir wissen vom offenen Kabel her, daß bei Änderung der Spannung am Kabelanfang unter sonst gleichen Voraussetzungen sich die Phase der Spannung am Kabelende nicht ändert, der Wert $Ep'_{1,2,0}$ ist aber der Teil der Spannung beim belasteten Kabel, der für sich allein beim offenen Kabel auftritt. Um also schließlich die wirklich erforderliche Spannung am Kabelanfang zu kennen, haben wir k' mit der ursprünglichen Spannung 3000 Volt zu multiplizieren, was schon dadurch geschehen ist, daß k' mit $P' + iQ'$ multipliziert wurde, denn hierin ist gemäß der Konstanten in jedem Glied 3000 enthalten.

Die Gleichung, von der jetzt auszugehen ist, nimmt die Form an:

$$k(P + iQ) = -(P + iQ)(p + iq) + k'(P' + iQ')$$

worin k' und P oder Q mit Hilfe der Trennung der reellen Teile von den imaginären und Benutzung der Beziehung $\sqrt{P^2 + Q^2} = J_{1,0}$ analog S. 47, 48 zu bestimmen ist. Mit der so auch der Phase nach festgelegten Stromstärke und der ermittelten Anfangsspannung wurden dann mit Hilfe der Gleichungen 1 bis 4 S. 39 die weiteren Werte nachstehender Tabelle S. 54 errechnet.

Tabelle.

Verhalten des Kabels wenn die Endspannung $Ep_{1,2,0} = 3000$ Volt vorgeschrieben ist, bei sonst gleichen Bedingungen wie in vorhergehende Tabelle S. 50 also $\varphi_0 = 0$ und Zählung der Phasenverschiebung von der Anfangsspannung aus, bei verschiedenen Belastungen.

$J_{1,0} =$	$100e^{i(360^0-13^06'50'')}$	$50e^{i(360^0-11^029')}$	$25e^{i(360^0-10^029'10'')}$	0; also offen. Kabel
$J_{1,l} =$	$120{,}46e^{i26^011'48''}$	$83{,}51e^{i45^048'40''}$	$70{,}41e^{i62^03'22''}$	$63{,}14e^{i83^016'30''}$
$J_{3,l} =$	$42{,}68e^{i63^048'10''}$	$38{,}68e^{i61^020'29''}$	$36{,}79e^{i59^059'28''}$	$34{,}93e^{i58^037'}$
$Ep_{1,2,l} =$	4147,5	3540	3240	2938
$\varphi_l =$	26° 11′ 48″	45° 48′ 40″	62° 3′ 22″	83° 16′ 30″
$A_0 =$	300	150	75	—
$A = (A'_l + A''_l) =$	486,55 (447,45 + 39,1)	238,89 (206,05 + 32,84)	136,7 (106,9 + 29,8)	48,4 (21,7 + 26,7)
$\eta =$	61,66	62,77	54,13	—

Wir bemerken, daß $J_{1,l}$ in den verschiedenen Belastungsfällen höhere Werte hat als in Tabelle S. 50, was sich durch die höheren Anfangsspannungen, die wiederum die Ladeströme erhöhen, erklärt. Die Phasenverschiebungen von $J_{1,l}$ sind auch infolge der größeren Ladeströme etwas größer als in Tabelle S. 50.

Infolge der Bedingung, daß in Tabelle S. 54 die Endspannung bei den verschiedenen Belastungen die gleiche ist, nimmt mit abnehmendem Nutzstrom die Anfangsspannung und mithin $J_{3,l}$ und A''_l ab, da in Gleichung 3 S. 39 die durch die Verringerung der Anfangsspannung hervorgerufene Abnahme von $J'_{3,l}$ die Veränderung des $J_{1,0}$ enthaltenden Ausdrucks überwiegt, im Gegensatze zur Tabelle S. 50, in welcher die zuletzt genannte Veränderung den Ausschlag gab, da infolge der konstanten Anfangsspannung der Wert $J'_{3,l}$ für die verschiedenen Belastungsfälle der gleiche bleibt.

Es eignete sich infolge der bei der Tabelle S. 50 gemachten Voraussetzung einer konstanten Anfangsspannung diese Tabelle besser zur näheren Erörterung, da die für das offene Kabel giltigen Werte bei Betrachtung der verschiedenen Belastungsfälle unverändert blieben. Es mag noch erwähnt sein, daß für die Werte beider Tabellen die Differenz zwischen Anfangs- und Endspannung im Verhältnis zu ihrer Größe nicht bedeutend von einander verschieden ist.

In vorhergehendem wurde nur das belastete Kabel bei $l = 100$ km in Betracht gezogen. Die durch die Kapazität gegen Bleimantel hervorgerufenen Nachteile werden naturgemaß bei geringeren Längen noch weniger ins Gewicht fallen. Die schon früher be-

gründete Tatsache, daß A''_l beim offenen Kabel den größten Wert hat, ist allgemein bei gleich welchen Längen giltig, denn immer wird infolge des Hinzutretens eines Nutzstromes Spannungsabfall in den Leitungen hervorgerufen und mithin die Spannung zwischen Außenleiter und Bleimantel verringert werden.

Für die Länge $l = 50$ km läßt sich also der größte Wert von A''_l mit Hilfe der für das offene Kabel aufgestellten Tabelle S. 34 sofort bestimmen:

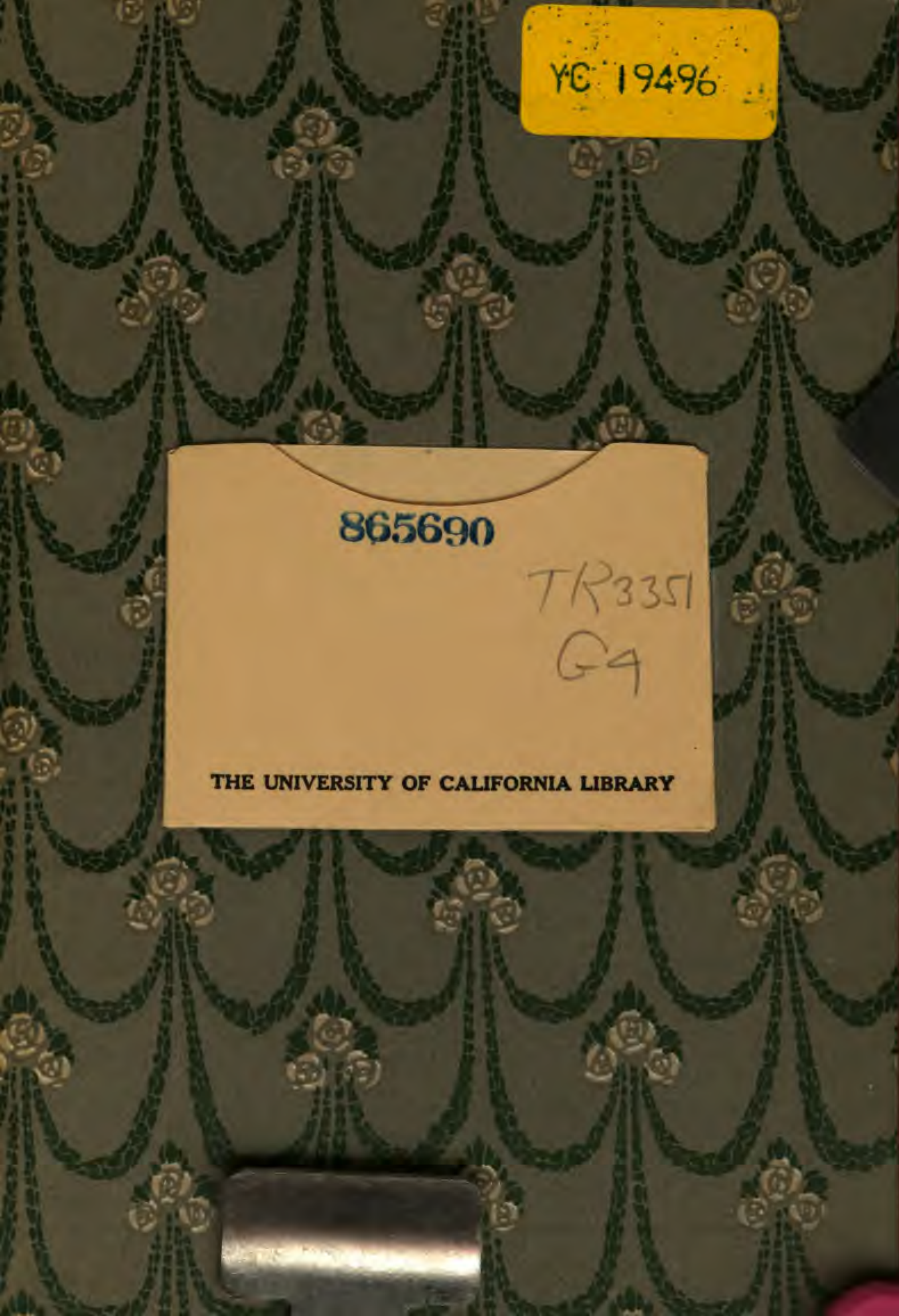
$$A''_{l=50} = 4{,}9 \text{ kw.}$$

Vergleichen wir diesen Wert mit:

$$A'_{l=100} = 27{,}8 \text{ kw} \quad \text{(s. S. 53)}$$

so bemerken wir, daß bei der halben Länge A''_l fast 6 mal kleiner geworden ist. Wenn die zu übertragende Leistung nicht besonders gering ist, wird mithin der Wirkungsgrad nur unbedeutend durch A''_l beeinflußt. Aus diesem Grunde erwies es sich für den vorliegenden Fall als überflüssig, das belastete Kabel auch bei $l = 50$ km zu behandeln.




YC 19496
865690
TR3351
G4
THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY

